Analytische Geometrie - Das Lotfußpunktverfahren

Grundprinzip

Für Abstandsberechnungen gibt es "fertige" Formeln. Überlegungen mit der Hesse-Normalenform oder dem Vektorprodukt sind die Grundlage. Ohne diese Formeln können Abstände zwischen Punkten und Geraden, Punkten und Ebenen, usw. berechnet werden, indem man zwei geeignete Punkte findet und dann deren Abstand bestimmt. (In einem orthonormalen Basissystem, das meistens benutzt wird, ist dann eine Berechnung mit den Koordinaten trivial möglich.) Weil bei solchen Abstandberechnungen senkrechte Abstände, z.B. Punkt von einer Geraden, gesucht werden, kommt ein Lot vor. Deshalb "Lotfußpunktverfahren".

Die Schritte des Verfahrens
(Abstand eines Punkts P zu einem anderen Objekt, Gerade g oder Ebene E)

1. Bestimme eine Normale **n** auf die Gerade oder Ebene.
2. Definiere eine Geradengleichung g_{LOT} durch P mit dem Richtungsvektor **n**.
   (Gerade in Parameterform)
3. Bestimme den Schnittpunkt von g_{LOT} mit g oder E.
   Dieser Schnittpunkt ist der "Lotfußpunkt" F
4. Berechne den Abstand als Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PF}$.

Details zu 1.

zu g in R^2 (g: Richtungsvektor **u**)

- $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ $\quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$; die Lösung enthält einen freien Parameter
  einfacher, in Koordinaten: vertauschen, 1 Vorzeichen ändern
- wenn g in der Normalenform, ist **n** bekannt

zu E in R^2

X **n** existiert nicht in R^2

zu g in R^3

X **n** kann nicht eindeutig bestimmt werden

zu E in R^3 (E mit Richtungsvektoren **u** und **v**)

- $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ und $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$; die Lösung enthält einen freien Parameter
- $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$; parameterfreie Lösung
- wenn E in der Normalenform, ist **n** bekannt

Details zu 2.

g_{LOT}: $\mathbf{x} = \mathbf{p} + r\,\mathbf{n}$
p Ortsvektor zu Punkt P

Details zu 3.

Suche des Schnittpunkts (bzw. Durchstoßpunkts) durch Gleichsetzen von $\mathbf{x}$ aus g_{LOT} und $\mathbf{x}$ aus g bzw. E. Die Lösung des linearen Gleichungssystems liefert Werte für die Parameter. Einsetzen in g_{LOT} bzw. g oder E liefert den Punkt F.

Details zu 4.

in R^2: $P(x_1 \mid y_1)$, $F(x_2 \mid y_2)$:

$$d = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

in R^3: $P(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$, $F(x_2 \mid y_2 \mid z_2)$:

$$d = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Allgemein, in R^2 und R^3:

Mit den Ortsvektoren $\mathbf{p}$ und $\mathbf{f}$ zu den Punkten P und F:

$d = |(\mathbf{f} - \mathbf{p})\cdot(\mathbf{f} - \mathbf{p})|$