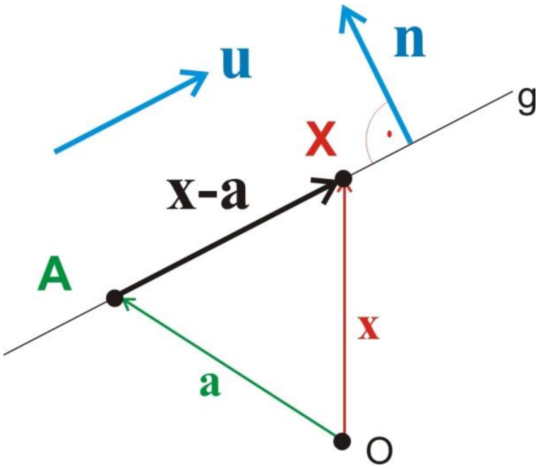
Analytische Geometrie - Vergleich der Formen (g,E)

Gerade

Die **Parameterform** zeigt, wie ausgehend von einem festen Aufpunkt A jeder andere Punkt X auf der Geraden durch Fortschreiten in der Richtung von **u** erreicht werden kann.
g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u}$
Diese Form ist **in R^2 und R^3** möglich



Die **parameterfreien Formen** verwenden, dass der Differenzvektor **x - a** parallel zum Richtungsvektor **u** oder senkrecht zur Normalen **n** liegt.
Hier sind die Möglichkeiten in R^2 und R^3 verschieden.

In R^2 wird üblicherweise $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \perp \mathbf{n}$ benutzt. Dies führt zur Normalenform g: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$ oder zur Hesse-Normalenform g: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o} = 0$. Für die Koordinaten in der Standardbasis ist die Normale **n** leicht aus **u** zu erhalten (Vertauschung und 1 Vorzeichenwechsel). Die Koordinatengleichung enthält die Normalenform aufgelöst für die Koordinaten.

In R^2 ist formal auch die Bedingung $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \parallel \mathbf{u}$ verwendbar (kollineare Vektoren). Mit dem Winkel $\varphi = 0$ zwischen beiden Vektoren ist dann g: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{u}|$. Für praktische Rechnungen ist diese Formel kein Vorteil, verglichen mit der Normalenform.
(Sie ist höchstens "theoretisch interessant".)

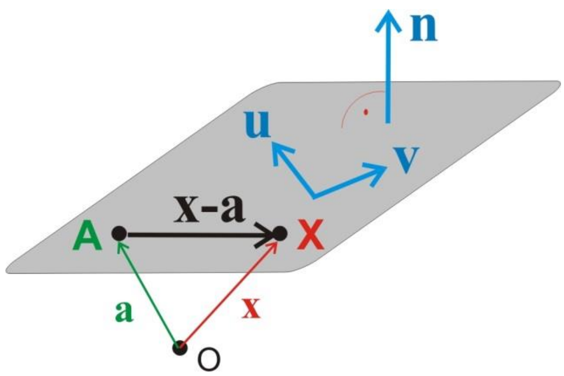
In R^3 gibt es keine Normalenform. Die Begründung wurde auf der Seite G02 gegeben.

In R^3 ist die Bedingung $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \parallel \mathbf{u}$ verwendbar. Das Kreuzprodukt zweier kollinearer Vektoren ist **0** (Nullvektor). Damit g: $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ebene

Eine Ebene ist nur in R^3 (als Objekt in diesem Vektorraum) definiert.

Die **Parameterform** zeigt, wie ausgehend von einem festen Aufpunkt A jeder andere Punkt X auf der Ebene durch Fortschreiten in der Richtung von **u** und **v** erreicht werden kann.
E: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v}$
Die **parameterfreien Formen** verwenden, dass der Differenzvektor **x - a** senkrecht zur Normalen **n** oder zusammen mit **u** und **v** in einer Ebene liegt.



Die Normale ist über ein Gleichungssystem $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ und $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$ berechenbar. (Dies liefert eine Lösung mit einem freien Parameter.) Direkt parameterfrei ist $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Damit ist die Normalenform E: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$ oder die Hesse-Normalenform E: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o} = 0$.

Wenn für **n** der Ausdruck **u** x **v** explizit eingesetzt wird, folgt E: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.
Dies kann auch anders interpretiert werden. Es liegt ein gemischtes Produkt der drei Vektoren **x** - **a**, **u** und **v** vor (Spatprodukt). Das Spatprodukt dreier Vektoren ist dann 0, wenn die drei Vektoren in <u>einer</u> Ebene liegen (komplanar). Ohne "Umweg über die Normale" wird so direkt die relative Lagebeziehung berücksichtigt. In Komponenten kann das Spatprodukt als Determinante geschrieben werden.

Beispiele

Rechenbeispiele dazu finden sich für den Fall einer Punktprobe ("Liegt ein Punkt auf der Geraden bzw. in der Ebene?") auf der Seite L01.