

## Matrizen

**Es werden die wichtigsten Sachverhalte erläutert!**  
**Ausführlicher: Multiplikation und Inverse Matrix**

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Elementen, z.B. Zahlen. Die Bedeutung für die Vektorrechnung besteht darin, dass damit Transformationen bzw. "Abbildungen" von Vektoren möglich sind. Ein Beispiel ist die Berechnung, welcher Vektor durch eine Drehung entsteht.

### 1. Rechengesetze

**WICHTIG:** Für die Verknüpfung durch Rechenoperationen gelten bestimmte Anforderungen an die Struktur, d.h. wie viele Zeilen und Spalten die Matrix hat!

#### **Index:**

Die Position des Elements wird durch den Zeilen- und Spaltenindex angegeben.

Übliche Konvention: "Zeile zuerst, Spalte später"

#### **Addition / Subtraktion:**

Elemente, die an der gleichen Position - d.h. Zeilen- und Spaltenindex - stehen, werden addiert / subtrahiert.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  haben gleiche Struktur

#### **Multiplikation mit einem Element, z.B. einer Zahl:**

Alle Elemente der Matrix werden damit multipliziert.

$$\mathbf{C} = r \mathbf{A} \Rightarrow c_{ij} = r a_{ij}$$

#### **Division durch ein Element:**

Nichts Neues!  $\mathbf{A} / r$  ist dasselbe wie  $(1/r) \mathbf{A}$

#### **Multiplikation zweier Matrizen:**

Ähnlich wie bei Vektoren wird diese Operation so definiert, dass sie in den Anwendungen Vorteile bringt.

Zur Schreibweise: Ein "Mal-Zeichen" wird meistens nicht geschrieben!

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B} \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj}$$

Die Forderungen an die Struktur werden noch mit einer "zweckmäßigen" Schreibweise bei manueller Rechnung erklärt.

Die Multiplikation ist nicht kommutativ.

#### **Division zweier Matrizen:**

Nicht definiert!

#### **Transponierte Matrix:**

$\mathbf{A}'$  entsteht aus  $\mathbf{A}$  durch Vertauschung der Zeilen und Spalten. (Auch Symbol  $\mathbf{A}^T$ )

Ein Vektor  $\mathbf{a}$  kann auch als 1-spaltige Matrix aufgefasst werden. Der transponierte Vektor  $\mathbf{a}'$  ist dann ein Zeilenvektor bzw. eine 1-zeilige Matrix.

#### **"Null-Matrix", "Eins-Matrix":**

Diese Matrizen können definiert werden. Je nach der angewandten Operation haben sie aber verschiedene Struktur!

Die Operation  $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A} \mathbf{1} = \mathbf{A}$  sind möglich.

Hinweis: Anstelle von  $\mathbf{1}$  werden wir eindeutiger die Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  definieren!

## Einheitsmatrix:

Nur für **quadratische** Matrizen!

**E** enthält auf der Diagonale jeweils 1, sonst 0. ( $e_{ij} = \delta_{ij}$ )

Wichtig für die Multiplikation:  $\mathbf{A E} = \mathbf{E A} = \mathbf{A}$

Es gibt nicht nur 1 Einheitsmatrix **E**, sondern zu jeder Struktur eine eigene!

## Inverse Matrix:

Nur für **quadratische** Matrizen!

Die inverse Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  ist definiert durch  $\mathbf{A A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{E}$

$\mathbf{A}^{-1}$  **existiert** aber **nur**, wenn die **Determinante** von **A** **nicht 0** ist,  $|\mathbf{A}| \neq 0$

Einsichtig ist  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$  ("Umkehrung der Umkehrung")

Es gilt  $(\mathbf{A B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$

## Umformen von Matrixausdrücken und -gleichungen:

Generell ist zu überprüfen, ob die Struktur verträglich ist!

Eine Addition / Subtraktion ist möglich.

Bei der Multiplikation muss auf beiden Seiten einer Gleichung gleichartig multipliziert werden. (Auf beiden Seiten von links oder rechts!)

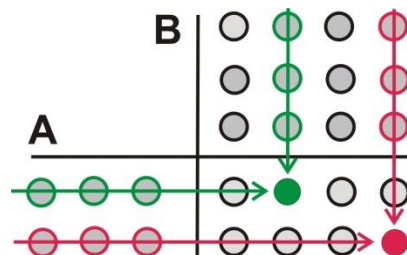
## 2. Matrixmultiplikation

### 2.1. Allgemein

Ein Schema ist dazu nützlich!

Für  $\mathbf{C} = \mathbf{A B}$  steht links **A**, oben **B**.

Ein Element von **C** ergibt sich, wenn jeweils nacheinander 1 Element der Zeile von **A** mit 1 Element der Spalte von **B** multipliziert wird. Die Summe liefert 1 Element von **C**.



In diesem Schema ist sofort erkennbar, wie die Struktur der Matrizen sein muss: Die Spaltenanzahl von **A** muss gleich der Zeilenanzahl von **B** sein.

Eine  $(m \times k)$  Matrix **A** multipliziert mit einer  $(k \times n)$  Matrix **B** liefert eine  $(m \times n)$  Matrix **C**. Dies zeigt auch anschaulich, dass  $\mathbf{A B} = \mathbf{B A}$  nicht allgemein gelten kann. In der Skizze wird multipliziert  $(2 \times 3) \cdot (3 \times 4) \rightarrow (2 \times 4)$ . Bei einer Umkehrung  $\mathbf{B A}$  wären die Strukturen  $(3 \times 4) \cdot (2 \times 3)$  - und das ist nicht erlaubt!

### 2.2 Anwendung auf Vektoren

Um die Matrizenrechnung auch auf Vektoren anzuwenden, wird ein Vektor als 1-spaltige Matrix behandelt. Dies erklärt auch die auf Seite V01 vorhandene Anmerkung.  $\mathbf{a}^T$  ist dann der zu **a** (Spalte!) "transponierte Vektor" und kann als Zeile  $\mathbf{a}^T = (a_x \ a_y \ a_z)$  geschrieben werden. Mit der Multiplikation "**Matrix x Vektor**" wird aus einem gegebenen Vektor ein neuer erzeugt. Man nennt das auch eine "**Abbildung**".

Wenn mehrere Abbildungen nacheinander durchgeführt werden, schreibt man die einzelnen Matrizen dafür von rechts nach links vor den Vektor!

Die Art, wie ein Element des Produkts entsteht, erinnert an das Skalarprodukt. Das ist kein Zufall! Das Skalarprodukt und die Bearbeitung mehrerer aufeinanderfolgender Abbildungen waren der wesentliche Grund für die gewählte Definition des Produkts von Matrizen!

### 2.3 Erklärung einer Abbildung am Beispiel

$$\text{Vektor } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Welche Struktur muss eine Matrix  $\mathbf{M}$  haben, damit die Operation  $\mathbf{b} = \mathbf{M} \mathbf{a}$  möglich ist?

→ Weil  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  die Struktur  $(3 \times 1)$  haben, muss sein  $(3 \times 3) \cdot (3 \times 1) \rightarrow (3 \times 1)$ .

→ Matrizen für Abbildungen von Vektoren sind quadratisch!

Welche geometrische Operation ist durch die Matrix  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  beschrieben?

$$\begin{array}{c|c} & 1 \\ & 2 \\ & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$-1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = -1$$

$$0 \quad -1 \quad 0 \quad | \quad = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 = -2$$

$$0 \quad 0 \quad -1 \quad | \quad = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = -3$$

→ Weil alle Koordinaten das Vorzeichen wechseln, ist dies eine Spiegelung am Ursprung.

Geometrisch erwarten wir: Wenn wir den Vektor  $\mathbf{a}$  mit  $\mathbf{b} = \mathbf{M} \mathbf{a}$  am Ursprung spiegeln und dann  $\mathbf{b}$  mit  $\mathbf{M} \mathbf{b}$  nochmals spiegeln, erhalten wir wieder  $\mathbf{a}$ . Ist das auch an den Matrizen zu sehen?

$$\rightarrow \text{Rechnung } \mathbf{M} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{a}$$

→ Als 1 kombinierte Abbildung geschrieben, wird durchgeführt  $\mathbf{b} = \mathbf{M} \mathbf{M} \mathbf{a}$ .

Wir können dafür schreiben  $\mathbf{K} \mathbf{a}$  mit  $\mathbf{K} = \mathbf{M} \mathbf{M}$ .

Die Durchführung der Rechnung liefert die Einheitsmatrix:  $\mathbf{M} \mathbf{M} = \mathbf{E}$ .

$\mathbf{E} \mathbf{a}$  bedeutet, dass die Komponenten des Vektors mit 1 multipliziert werden, der Vektor also nicht geändert wird.

→ Ein Vorteil der Anwendung von Matrizen ist damit auch, dass wir komplizierte zusammengesetzte Operationen schrittweise aufbauen können und am Ende 1 Matrix erhalten.

In den Übungen soll dies mit einigen geometrischen Operationen in  $\mathbb{R}^2$  verdeutlicht werden!

### 3. Übung - Kombination von Abbildungen

(Für geringeren Rechenaufwand in  $\mathbb{R}^2$ )

Bekannte Matrizen:

$$\text{Einheitsmatrix } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Inversion (Spiegelung am Ursprung) } \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Drehung um } 90^\circ \text{ (im Gegen-Uhrzeigersinn) } \mathbf{D}_{90} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Drehung um Winkel } \varphi \text{ (im Gegen-Uhrzeigersinn) } \mathbf{D}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

- 1) Zweimalige Drehung um  $90^\circ$  entspricht einer Inversion
- 2) Dreimalige Drehung um  $30^\circ$  entspricht einer Drehung um  $90^\circ$
- 3) Drehung um  $180^\circ$  und dann Inversion führt wieder zur Ausgangssituation
- 4) Matrix für Spiegelung an der x-Achse  $\mathbf{S}_X$ ?
- 5) Matrix für Spiegelung an der y-Achse  $\mathbf{S}_Y$ ?
- 6) Welche einmalige Operation entspricht  $\mathbf{S}_X$  und dann  $\mathbf{S}_Y$ ?
- 7) Ist die Operation  $\mathbf{S}_Y$  und dann  $\mathbf{S}_X$  dasselbe?
- 8) Matrix für eine Operation, die den Vektor auf die 3-fache Länge verlängert, ohne die Orientierung zu ändern, und dann um  $90^\circ$  dreht.

$$1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ja}$$

$$2) \mathbf{D}_{30} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = 1/2 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{30} \cdot \mathbf{D}_{30} = 1/4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}_{30} \cdot (\mathbf{D}_{30} \cdot \mathbf{D}_{30}) = 1/2 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot 1/4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} = 1/8 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ja}$$

$$3) \mathbf{D}_{180} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \mathbf{I} \mathbf{D}_{180} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

- 4) Eine Spiegelung an der x-Achse ändert das Vorzeichen der x-Koordinate und lässt die y-Koordinate unverändert.

$$\text{"Kurzes Probieren" führt zu } \mathbf{S}_X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 5) Analog für die y-Spiegelung  $\mathbf{S}_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- 6)  $\mathbf{S}_X$  und dann  $\mathbf{S}_Y$ :  $\mathbf{S}_Y \cdot \mathbf{S}_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$

(eventuell durch eine Skizze überprüfen)

- 7)  $\mathbf{S}_X \cdot \mathbf{S}_Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \rightarrow \text{ja}$

(eventuell auch mit einer Skizze überprüfen, dass dieselbe Endsituation vorliegt)

- 8) Wenn ein Vektor auf die 3-fache Länge verlängert wird, ändern sich x- und y-Koordinate mit dem gleichen Faktor 3. ( $\sqrt{(3x)^2 + (3y)^2} = 3 \sqrt{x^2 + y^2}$ ).

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{90} \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

#### 4. Ergänzung - Zum Produkt von Matrizen

Mehrfach aufeinander folgende Abbildungen werden durch ein Produkt von Matrizen beschrieben. Damit lässt sich auch die Rechenvorschrift für das Produkt verstehen.

Ein Vektor  $\mathbf{v}$  ist eine Linearkombination der Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$ .

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$$

(Für unsere "üblichen" Anwendungen ist  $n = 2$  oder  $n = 3$ . Im Folgenden werden die Grenzen nicht mehr angeschrieben, sondern nur noch die Summationsvariable.  $v_i$  sind die Koordinaten, die "üblicherweise" als Spaltenvektor angeschrieben werden. Äquivalent zu einem Spaltenvektor ist eine 1-spaltige Matrix.)

Eine Abbildung von  $\mathbf{v}$  kann als Summe der Abbildungen (Transformationen) auf die Basisvektoren geschrieben werden.  $\mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{A} \sum_i v_i \mathbf{e}_i = \sum_i v_i \mathbf{A} \mathbf{e}_i$

Wir betrachten nun -nur noch - wie sich die Abbildung auf die Basisvektoren auswirkt.

(Damit haben wir in den weiteren Schritten eine Summation weniger.)

$$\text{Explizit angeschrieben ist } \mathbf{A} \mathbf{e}_i = \sum_j a_{ij} \mathbf{e}_j = \mathbf{f}_i$$

( $i$ -te Zeile der Transformationsmatrix  $\cdot$  Spalte aller Basisvektoren. Die Transformation eines Basisvektors muss eine Linearkombination aller Basisvektoren liefern.)

$\mathbf{f}_i$  sind die Vektoren, die durch  $\mathbf{A} \mathbf{e}_i$  erzeugt werden.

Einige Zeilen später benötigen wir eine Umbenennung der Indizes. Um Verwirrung zu vermeiden: Es ist also

$$\text{auch } \mathbf{f}_k = \sum_j a_{kj} \mathbf{e}_j$$

Analog gilt für eine andere Transformationsmatrix  $\mathbf{B}$  bzw.  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{B} \mathbf{e}_i = \sum_j b_{ij} \mathbf{e}_j \text{ bzw. } \mathbf{C} \mathbf{e}_i = \sum_j c_{ij} \mathbf{e}_j$$

Nun eine kombinierte Abbildung - zuerst  $\mathbf{A}$  dann  $\mathbf{B}$  - die wir durch eine Matrix  $\mathbf{C}$  beschreiben wollen.  $\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{C} \mathbf{e}_i$  sollen dasselbe bewirken. Gesucht ist dann nur noch, wie  $\mathbf{C} = \mathbf{B} \mathbf{A}$  zu berechnen ist.

Zuerst die Transformation der Vektoren  $\mathbf{f}_i$  durch die Abbildung  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} \mathbf{f}_i = \sum_k b_{ik} \mathbf{f}_k$$

(Die Abbildung erzeugt wieder eine Linearkombination aller Basisvektoren. Dies sind jetzt die Vektoren  $\mathbf{f}_i$ , die durch den vorangegangenen Schritt mit  $\mathbf{A}$  erzeugt wurden.)

Die Kombination beider Schritte, verglichen mit dem Ausdruck für  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{e}_i &= \sum_k b_{ik} \sum_j a_{kj} \mathbf{e}_j = \sum_j \sum_k b_{ik} a_{kj} \mathbf{e}_j \\ \mathbf{C} \mathbf{e}_i &= \sum_j c_{ij} \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt  $c_{ij} = \sum_k b_{ik} a_{kj}$  - und das ist genau die Definition eines Elements eines Produkts von Matrizen!

## 5. Inverse Matrix

Die Berechnung der Inversen Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  ist prinzipiell manuell möglich.

Wenn die Matrix Zahlen enthält - also keine Symbole - kann die Aufgabe mit "besseren" Taschenrechnern durchgeführt werden. Auch in Office-Programmen (z.B. Excel oder Open Office) ist dies möglich (Eingabe als Matrixformel beachten!)

### Manuelle Berechnung für eine 2x2 Matrix

Hier ist ein direkter Weg am schnellsten.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}; \text{Det}(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a d - b c$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = 1/-2 \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

### Manuelle Berechnung für höhere Matrizen

Prinzipiell ist ein Weg mit Kofaktoren möglich. (Berechnung einer "Adjunkten")

(Zweckmäßiger ist aber das Gauß-Jordan-Verfahren!)

$$\text{Es gilt dann } (\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{A})} (-1)^{i+j} D_{ji}$$

Die Unterdeterminante (Streichungsdeterminante)  $D_{ij}$  entsteht aus  $\det(\mathbf{A})$  durch Streichen der Zeile  $i$  und Spalte  $j$ .

Für die 2x2 Matrix führt dies zur obigen Formel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; D_{11} = d; D_{12} = c; D_{21} = b; D_{22} = a$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} (-1)^2 D_{11} & (-1)^3 D_{21} \\ (-1)^3 D_{12} & (-1)^4 D_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Beispiel 3x3-Matrix  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Streichungsdeterminante  $D_{12} \rightarrow \begin{vmatrix} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ 3 & \underline{2} & 1 \\ 2 & \underline{-4} & -2 \end{vmatrix}$  Zeile 1, Spalte 2 gestrichen  
 $\rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8$  und dazu  $(-1)^{1+2} = -1$

In dieser Weise:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0 / +1 \quad D_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8 / -1$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 4 = -16 / +1 \quad D_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 12 = 8 / -1$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8 / +1 \quad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8 / -1$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 / +1 \quad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9 = -8 / -1$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 / +1$$

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 + 16 - 48 = -32$$

$$\text{Matrix der } (-1)^{i+j} D_{ij}: \begin{pmatrix} 0 & 8 & -16 \\ -8 & -8 & 8 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}; \text{ Transponierte davon: } \text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 \\ 8 & -8 & 8 \\ -16 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \text{adj}(\mathbf{A}) / \det(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/8 \\ -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & -1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$$

### Manuelle Berechnung ("Gauß-Jordan-Verfahren")

Prinzip: Eine Matrix wird durch Zeilenumformungen in eine Einheitsmatrix umgewandelt. Dieselben Umformungen werden (parallel) auf eine Einheitsmatrix angewandt, das Ergebnis ist dann die inverse Matrix. Insgesamt wird eine "Blockmatrix" - links  $\mathbf{A}$ , rechts  $\mathbf{E}$  - durch Zeilenumformungen in links  $\mathbf{E}$ , rechts  $\mathbf{A}^{-1}$  umgewandelt.

Start:	$\mathbf{A}$	$\mathbf{E}$	
[1]	1 2 3	1 0 0	(Ziel: links Einheitsmatrix)
[2]	3 2 1	0 1 0	
[3]	2 -4 -2	0 0 1	
-----			
[1]	1 2 3	1 0 0	
[2']	0 4 8	3 -1 0	= 3 [1] - [2] (Beginn links von Diagonale)
[3']	0 8 8	2 0 -1	= 2 [1] - [3]
-----			
[1]	1 2 3	1 0 0	
[2']	0 4 8	3 -1 0	
[3'']	0 0 8	4 -2 1	= 2 [2'] - [3'] (Dreiecksform erreicht)
-----			
[1']	8 16 0	-4 6 -3	= 8 [1] - 3 [3''] (jetzt rechts von Diagonale)
[2'']	0 4 0	-1 1 -1	= [2'] - [3'']
[3'']	0 0 8	4 -2 1	
-----			
[1'']	8 0 0	0 2 1	= [1'] - 4 [2'']
[2'']	0 4 0	-1 1 -1	
[3'']	0 0 8	4 -2 1	(links Diagonalmatrix erreicht)
-----			
[1''']	1 0 0	0 1/4 1/8	= [1''] / 8 (links Einheitsmatrix erzeugen)
[2''']	0 1 0	-1/4 1/4 -1/4	= [2''] / 4
[3''']	0 0 1	1/2 -1/4 1/8	= [3''] / 8 rechts $\mathbf{A}^{-1}$

### Erklärung zum Gauß-Jordan-Verfahren

Die verwendeten Zeilenumformungen lassen sich auch als Multiplikation mit einer Matrix darstellen! Dabei werden die sog. "Elementarmatrizen" benutzt. (Das sind Matrizen, die aus der Einheitsmatrix selbst durch solche Zeilenumformungen entstehen.)

Ein Produkt solcher Elementarmatrizen  $\mathbf{P}$  überführt die Matrix  $\mathbf{A}$  in die Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$ . Dann überführt  $\mathbf{P}$  die Einheitsmatrix in die inverse Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$ .

$$\mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}$$

$\mathbf{P}$  auf  $\mathbf{A}$  angewandt

$\mathbf{P}$  auf  $\mathbf{E}$  angewandt

Zu zeigen bleibt nur noch, dass die Elementarmatrizen tatsächlich die Zeilenumformung durchführen und dass ein Produkt die aufeinanderfolgenden Umformungen durchführt.

Drei Grundtypen der Elementarmatrizen existieren: Vertauschung zweier Zeilen, Addition zweier Zeilen und Multiplikation einer ganzen Zeile mit einer Konstanten.

Aus den beiden letzten lässt sich "Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten und Addition zu einer anderen" auch als 1 Matrix erzeugen.

Alle Elementarmatrizen entstehen aus der Einheitsmatrix **E** durch Zeilenumformungen.

- Vertauschung  $V_{ik}$  - vertauscht Zeilen i und k. In **E** werden 4 Elemente geändert,  $V_{ii} = V_{kk} = 0$  (statt 1),  $V_{ik} = V_{ki} = 1$  (statt 0)
- Addition  $A_{ik}(x)$  - x-faches der Zeile k zur Zeile i addiert, das liefert die neue Zeile i. In **E** wird 1 Element geändert,  $A_{ik} = x$  (i-te Zeile, k-Spalte)
- Multiplikation  $M_i(x)$  - die ganze Zeile i wird mit x multipliziert, das liefert die neue Zeile i. In **E** wird 1 Diagonalelement geändert,  $M_{ii} = x$  (vorher 1)

(Auch Spaltenumformungen sind so möglich, dann wird von rechts multipliziert. Bei der Addition sind dabei Zeilen und Spalten vertauscht.)

- Vertauschung zweier Zeilen, hier 1 mit 3 -  $V_{13}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

- 4-faches der 3. Zeile zur 1. Zeile addiert -  $A_{31}(4)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4g & b+4h & c+4i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

- Kombination: Zuerst Vertauschung Zeile 1 mit 3, dann 4-faches der 3. Zeile zur ersten addiert -  $A_{31}(4) V_{13}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+g & 4b+h & 4c+i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

- Kombination: Eine oben benutzte Umformung war:  $[1'] = 8 [1] - 3 [3]$

Dies ist in den Schritten "Multiplikation Zeile 1 mit 8" und dann "Subtraktion 3-faches der Zeile 3 von Zeile 1" möglich -  $A_{31}(-3) M_1(8)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{-3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & 0 & \mathbf{-3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-3g & 8b-3h & 8c-3i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Zur manuellen Berechnung von  $A^{-1}$  ist die Durchführung der Zeilenumformungen schneller, zur Erklärung, warum das funktioniert, dient die Anwendung der Elementarmatrizen.

Als Ergänzung - zum Vergleich - noch eine Spaltenumformung (dabei also Linksmultiplikation!):

Subtrahiere 5-faches der Spalte 2 von der Spalte 1 -  $A_{21}(-5)$ :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-5b & b & c \\ d-5e & e & f \\ g-5h & h & i \end{pmatrix}$$