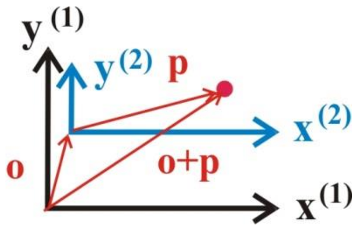
Transformation - 1

1. Allgemeines
2. Zwei durch eine Translation verknüpfte gleichartige Basissysteme
3. Zwei durch eine Translation verknüpfte verschiedenartige Basissysteme (noch gleiche Orientierung)
4. Drehung (um den Koordinatenursprung)

1. Allgemeines

Die Lage eines Punktes kann durch einen Ortsvektor (ausgehend vom Ursprung des Koordinatensystems beschrieben werden.

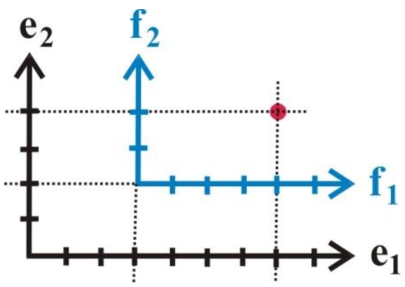


Prinzipiell ist das ganz einfach!
Im System (2) ist der Vektor **p**.
Im System (1) ist der Vektor **o** + **p**,
dabei ist **o** der Vektor von Ursprung von (1) zu (2).

"Schwierigkeiten" treten erst dann auf, wenn mit der Koordinatendarstellung der Vektoren gerechnet werden soll. In einer Form "**o** + **p**" müssen die Koordinaten sich auf dieselben Basisvektoren beziehen! (Keine "Äpfel + Birnen"!) In den "üblichen" Anwendungen wird diese Forderung nicht mehr explizit genannt, da man sich stets auf 1 (meistens kartesisches) Basissystem bezieht.
Für das Verständnis der Beziehungen ist es sinnvoll, sich die Bedeutung der Koordinaten klar zu machen.
Die Angabe $\mathbf{v} = \binom{x}{y}$ bedeutet $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e_1} + y\,\mathbf{e_2}$, wenn $\mathbf{e_i}$ die Basisvektoren sind. Genauso ist "üblich", dass die Basisvektoren orthonormiert sind. ("Orthonormiert" ist: a) senkrecht aufeinander, "orthogonal", b) "normiert", Länge 1.) Diese Forderung "orthonormiert" muss für eine Basis nicht allgemein gelten. (Bei der geometrischen Beschreibung von Kristallstrukturen ist dies beispielsweise nicht mehr der Fall.) Stets gültig ist die Beschreibung eines Vektors als Linearkombination der Basisvektoren.

2. Zwei durch eine Translation verknüpfte gleichartige Basissysteme

Basis **1**: {$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$}; Basis 2: {$\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$} Beide Basissysteme seien orthonormiert und haben die gleiche Orientierung (bezüglich eines übergeordneten kartesischen Koordinatensystems der Ebene).



"Ohne Nachdenken" lesen wir aus der Skizze ab:

- **P**(4|2) in (2) und **P**(7|4) in (**1**)
- Ursprung (2): $\mathbf{O_2}$(3|2) in (**1**)
  {Ursprung (**1**): $\mathbf{O_1}$(-3|-2) in (2) nicht benötigt}
  Trivial ist
- $\mathbf{O_1}$(0|0) in (**1**) und $\mathbf{O_2}$(0|0) in (2).

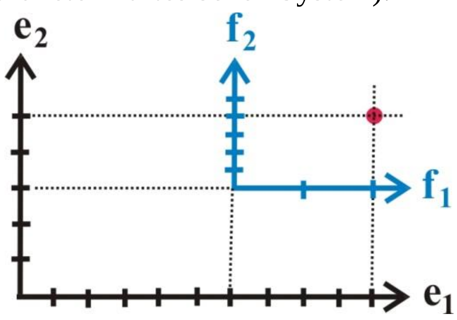
Rechnerisch, mit Koordinaten ("Addieren oder Subtrahieren des Ursprungs"):

- "**p** + **o**": $\binom{4}{2} + \binom{3}{2} = \binom{7}{4}$ {Koordinaten in (**1**) aus Koordinaten in (**2**)}
- "**p** - **o**": $\binom{7}{4} - \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$ {Koordinaten in (**2**) aus Koordinaten in (**1**)}

Das erscheint nun wirklich trivial! Genauer hingesehen, haben wir einen Fehler gemacht - wenn die vorher genannte Forderung, sich "stets auf dieselben Basisvektoren zu beziehen" gelten soll. Die Lösung im nächsten Abschnitt!

3. Zwei durch eine Translation verknüpfte verschiedenartige Basissysteme (noch gleiche Orientierung)

Basis **1**: {$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$}; Basis **2**: {$\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$} Beide Basissysteme seien orthogonal, aber die Einheitsvektoren haben verschiedene Längen (ausgedrückt im übergeordneten kartesischen System).



Aus der Skizze lesen wir ab:

- **P**(2|4) in (**2**) und **P**(10|5) in (**1**)
- Ursprung (**2**): $\mathbf{O_2}$(6|3) in (**1**)

  {Ursprung (**1**): $\mathbf{O_1}$(-3|-6) in (**2**) nicht benötigt}

  Wieder trivial ist
- $\mathbf{O_1}$(0|0) in (**1**) und $\mathbf{O_2}$(0|0) in (**2**).

A

Wenn für den Punkt **p** der Vektor in (**2**) ist, gilt immer noch **p** + **o** für den Vektor in (**1**).
Die "einfache" Rechnung - mit Einsetzen der vorhandenen Koordinaten - für den Punkt in (**1**) führt aber zu einem Fehler!

Fehlerhafte Rechnung mit den vorhandenen Zahlenwerten :

"**p** + **o**": $\binom{2}{4} + \binom{6}{3} = \binom{8}{7}$ {"Koordinaten in (**1**) aus Koordinaten in (**2**)"} ☒

Richtig ist aber P in (**1**): $\mathbf{p} = \binom{10}{5}$.

$\mathbf{p} = \binom{2}{4}$ bezieht sich auf System **2**, $\mathbf{o} = \binom{6}{3}$ bezieht sich auf System **1**!

Die Koordinaten müssen sich bei dieser Rechnung aber auf gleiche Basisvektoren beziehen!

➔ Weil wir als Ergebnis die Koordinaten im System **1** wollen, beziehen wir Alles auf dieses System!

o: $\binom{6}{3}$ bedeutet $6\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2$. {Keine weitere Aktion erforderlich}

p: $\binom{2}{4}$ bedeutet $2\,\mathbf{f}_1 + 4\,\mathbf{f}_2$.

In der Skizze sehen wir die Zusammenhänge $\mathbf{f}_1 = 2\,\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{f}_2 = (1/2)\,\mathbf{e}_2$.
Eingesetzt ist die Linearkombination $\mathbf{p} = 4\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2$.
Unter Verwendung der Einheitsvektoren von (**1**), $\mathbf{e}_i$, also $\mathbf{p} = \binom{4}{2}$.

➔ Damit folgt für "**p** + **o**": $\binom{4}{2} + \binom{6}{3} = \binom{10}{5}$ ☑

B

Wir können auch Alles mit $\mathbf{f}_i$ rechnen,

o: $\binom{6}{3} = 6\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 \quad \rightarrow 3\,\mathbf{f}_1 + 6\,\mathbf{f}_2$

o + **p**: $\binom{10}{5} = 10\,\mathbf{e}_1 + 5\,\mathbf{e}_2 \quad \rightarrow 5\,\mathbf{f}_1 + 10\,\mathbf{f}_2$

(**o** + **p**) - **o** $= \binom{5}{10} - \binom{3}{6} = \binom{2}{4}$ ☑

C

Diese Rechnungen zeigen, warum in Kapitel 2 keine Probleme auftraten. Weil $\mathbf{e_i} = \mathbf{f_i}$ brauchten wir uns um die Zuordnung, welches Basissystem benutzt wurde, nicht zu kümmern!

4. Drehung (um den Koordinatenursprung)

A

Als Erstes *Drehung eines Punkts*. Am schnellsten ist die Herleitung unter Verwendung von Polarkoordinaten.

Ein Punkt mit den kartesischen Koordinaten x und y hat die Polarkoordinaten r und φ.
Der Zusammenhang ist

$x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$.

Wird um einen Winkel α (im mathematisch positiven Sinn, d.h. im Gegenuhrzeigersinn) gedreht, sind die neuen Koordinaten

$x' = r\cos(\varphi + \alpha)$ und $y' = r\sin(\varphi + \alpha)$.

Die Drehung erfolgt um den Ursprung des Koordinatensystems.

Additionstheoreme: $\cos(\varphi + \alpha) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\alpha)$
$\sin(\varphi + \alpha) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha)$.

Geordnet: $x' = r\cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) + r\sin(\varphi) \cdot [-\sin(\alpha)] \quad = x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha)$
$y' = r\sin(\varphi) \cdot \cos(\alpha) + r\cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) \quad = y\cos(\alpha) + x\sin(\alpha)$.

Als Beziehung Matrix · Vektor ist dies

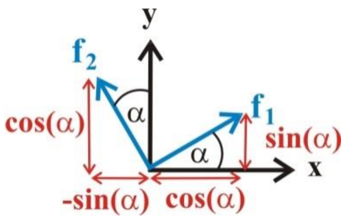
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ - für $\mathbf{x}$(gedreht) = $\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}$(Ausgang)

! Damit ist hier definiert, welche Elemente der Matrix **D** hat!
Es gibt auch Arbeiten, in denen für die **D** die Transponierte davon (Zeilen / Spalten vertauscht) benutzt wird. Wichtig ist nur, dass konsequent in den weiteren Formeln diese Wahl verwendet wird.

B

Als Zweites sehen wir uns die *Drehung eines Koordinatensystems* an.

$\mathbf{f_i}$ sind die Basisvektoren eines um den Winkel α gedrehten Systems. x, y sind die Achsen des Basissystems $\{\mathbf{e_i}\}$.



Dann sind die Koordinaten von Einheitsvektoren:

$\mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ und $\mathbf{f_2} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ - im System $\{\mathbf{e_i}\}$

Das entspricht den Linearkombinationen

$\mathbf{f_1} = \cos(\alpha)\,\mathbf{e_1} + \sin(\alpha)\,\mathbf{e_2}$ und $\mathbf{f_2} = -\sin(\alpha)\,\mathbf{e_1} + \cos(\alpha)\,\mathbf{e_2}$

Die Matrix **D** entsteht durch Anordnung der Koordinaten der Basisvektoren als Spalten.

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Damit bleiben wir bei der einmal getroffenen Wahl für die Elemente von **D**!

Als Gleichung mit Vektoren gilt dann: $(\mathbf{f_1}\ \mathbf{f_2}) = (\mathbf{e_1}\ \mathbf{e_2}) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

(Zeilenvektor · Matrix)

Eventuell ist nützlich, sich einfach zu merken, das **D** die genannte Linearkombination der Basisvektoren für eine Drehung der Achse um +α beschreibt.

Für die inverse Matrix gehen wir "nicht mathematisch" vor! $\mathbf{D}^{-1}$ beschreibt die Drehung eines Punkts bzw. Vektors, wenn **D** die Drehung der Basis beschreibt. Wenn für die Drehung der Basis +α gilt, gilt für die Drehung des Punkts -α.

Anschaulich ist unmittelbar einsichtig, dass es äquivalent ist, wenn wir einen Punkt relativ zu einem Koordinatensystem drehen und wenn wir das Koordinatensystem im entgegen gesetzten Sinn darunter drehen.

Mit sin(-α) = -sin(α) und cos(-α) = cos(α) ist damit $\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Wer will, kann als Übung die Matrixmultiplikation durchführen und verifizieren, dass $\mathbf{D}\,\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{E}$.

$\mathbf{D}^{-1}$ in der Form "$\mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{p}$" errechnet aus den Koordinaten in $\{\mathbf{e}_i\}$ die Koordinaten in $\mathbf{p}\{\mathbf{f}_i\}$, wenn **D** die Drehung der Basis $\{\mathbf{e}_i\} \to \{\mathbf{f}_i\}$ bewirkt.

Für praktische Rechnungen kann noch beachtet werden, dass $\mathbf{D}^{-1}(\alpha) = \mathbf{D}(-\alpha)$.

Die Transformation der Basisvektoren und der Vektoren in dieser Basis werden durch zueinander inverse Matrizen beschrieben, man nennt das "kontragrediente Transformationen".

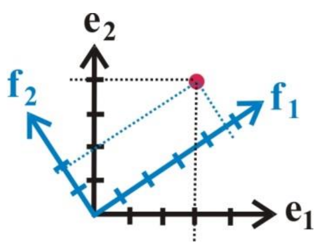
Beispiel 1:

Punkt $\mathbf{p} = \binom{3}{4}$ im System $\{\mathbf{e}_i\}$

Das orthonormierte Basissystem $\{\mathbf{e}_i\}$ wird um den Winkel α = 30° gedreht.

Gesucht:

Koordinaten von **p** im System $\{\mathbf{f}_i\}$



Drehung: Koordinaten von $\mathbf{p}\{\mathbf{e}_i\}$ nach $\mathbf{p}\{\mathbf{f}_i\}$ (α = 30°)

$$\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\binom{3}{4} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\binom{3}{4} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3}/2 + 2 \\ -3/2 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \binom{4{,}6}{2{,}0}$$

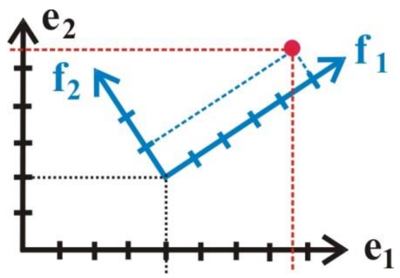
Beispiel 2:

Punkt $\mathbf{p} = \binom{5}{1}$ im System **2**, Basis $\{\mathbf{f}_i\}$

Das orthonormierte Basissystem $\{\mathbf{f}_i\}$ ist um α = 30° gegenüber einem System **1**, Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ gedreht.

Der Ursprung **2** zu $\{\mathbf{f}_i\}$ ist um $\binom{4}{2}$ relativ zum Ursprung **1** verschoben. (siehe Skizze!)

(Dies sind Koordinaten in **1**, $\{\mathbf{e}_i\}$)



Gesucht:

Koordinaten von **p** im System $\{\mathbf{e}_i\}$ - Ursprung **1**

- ➔ Erinnerung: Die Verschiebung muss im gleichen Basissystem erfolgen!
- ➔ Dazu kommt: Die Drehung erfolgt um den Ursprung des für die Koordinaten benutzten Systems.

Eine Berechnung ist auf mehreren Wegen durchführbar.

! (Leider) kommt die Verschiebung nicht im Zusammenhang zwischen $\{\mathbf{e}_i\}$ und $\{\mathbf{f}_i\}$, sondern nur bei der Berechnung von Koordinaten in den entsprechenden Systemen vor.

A

Der Verschiebungsvektor ist gegeben in **1**, $\{\mathbf{e}_i\}$. Wenn die Verschiebung in **1**, $\{\mathbf{e}_i\}$ gerechnet werden soll, muss auch **p** in **1**, $\{\mathbf{e}_i\}$ vorliegen.

Gegeben ist $\mathbf{p}\{\mathbf{f}_i\}$. Dieses muss also vorher umgerechnet werden.

- Die Drehung $\{\mathbf{f}_i\} \to \{\mathbf{e}_i\}$ erfolgt durch **D** mit α = -30°. {**1** um -30° gegenüber **2** gedreht}
- Die neuen Koordinaten eines Punkts (Vektors), $\mathbf{p}\{\mathbf{f}_i\} \to \mathbf{p}\{\mathbf{e}_i\}$, folgen aus der Rechnung mit $\mathbf{D}^{-1}(-30°) = \mathbf{D}(+30°)$.

Drehung: Koordinaten von $\mathbf{p}\{\mathbf{f}_i\}$ nach $\mathbf{p}\{\mathbf{e}_i\}$ (α = 30°)

$$\mathbf{D}\,\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\binom{5}{1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\binom{5}{1} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{3}/2 - 1/2 \\ 5/2 + \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \approx \binom{3{,}83}{3{,}37}$$

Der Fixpunkt der Drehung ist dabei (aber) immer noch der Ursprung **2** des Systems {$\mathbf{f_i}$}!
{Der Ursprung **O**(0|0) ändert sich bei der Drehung nicht. Das Zwischenresultat gilt für ein System, das dieselben Basisvektoren $\mathbf{e_i}$ hat wie System **1**, also die richtige Orientierung - aber einen anderen Ursprung als **1** - nämlich immer noch den Ursprung von **2**!}

Verschiebung: Ursprung **2** nach Ursprung **1**

$\mathbf{o}+\mathbf{p} = \begin{pmatrix}3{,}83\\3{,}37\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}7{,}8\\5{,}4\end{pmatrix} = \mathbf{p}\{\mathbf{e_i}\}$ - mit dem Ursprung **1** von {$\mathbf{e_i}$} - siehe Skizze.

Die Forderung, dass für eine Verschiebung die Koordinaten sich auf die gleichen Basisvektoren beziehen müssen, ist erfüllt - beide Vektoren beziehen sich auf {$\mathbf{e_i}$}. Die Verschiebung hat (nur) den gewünschten neuen Ursprung erzeugt.

! Eventuell "ärgerlich" aber unvermeidbar, wenn Drehung und Translation vorkommen:
Wichtig sind der Drehwinkel *und* die Ursprungsverschiebung!
Hier geschieht das durch die Angabe des Systems **1**, **2** zusätzlich zu {$\mathbf{e_i}$}, {$\mathbf{f_i}$}

Wer will, kann alternativ auch noch durch einen weiteren Index den Koordinatenursprung kennzeichnen.

B

Möglich ist auch, zuerst **2** so verschieben, dass der Fixpunkt für die Drehung im Ursprung von **1** liegt. Als Zwischenresultat haben wird dann **p** mit der Basis {$\mathbf{f_i}$}, aber mit dem Ursprung **1**. Anschließend erfolgt die Drehung. Damit folgt das gewünschte Ergebnis, **p** im System **1** mit der Basis {$\mathbf{e_i}$}. (Die Drehung ändert den Ursprung nicht.)

Für den 1. Schritt benötigen wir die Koordinaten des Ursprungs **2** in der Basis {$\mathbf{f_i}$}!
(Gleiche Basis bei Verschiebungen!)

Koordinaten $\mathbf{v}\{\mathbf{e_i}\}$ nach $\mathbf{v}\{\mathbf{f_i}\}$

2 ist um +30° gegenüber **1** gedreht, **D**(+30°) für Basis ⇒ $\mathbf{D}^{-1}$(+30°) für Punkt/Vektor.

$\mathbf{v}' = \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\-\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\-1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sqrt{3}+1\\-2+\sqrt{3}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}4{,}46\\-0{,}27\end{pmatrix}$

Nun die Verschiebung des Punkts **p**: $\mathbf{v}' + \mathbf{p} = \begin{pmatrix}4{,}46\\-0{,}27\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9{,}46\\0{,}73\end{pmatrix}$

Dieses Zwischenresultat sind die Koordinaten von **p**, immer noch angegeben mit {$\mathbf{f_i}$}, aber dem neuen Ursprung **1**.

Dieses $\mathbf{p}\{\mathbf{f_i}\}$ wird in das gewünschte Endresultat $\mathbf{p}\{\mathbf{e_i}\}$ transformiert. Dann sind die Basisvektoren {$\mathbf{e_i}$} und der Ursprung ist **1**.

Koordinaten $\mathbf{p}\{\mathbf{f_i}\}$ nach $\mathbf{p}\{\mathbf{e_i}\}$ {Drehung um den Ursprung **1**, α = +30°}

$\mathbf{D}\,\mathbf{p} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9{,}46\\0{,}73\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9{,}46\\0{,}73\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8{,}19-0{,}37\\4{,}73+0{,}63\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}7{,}8\\5{,}4\end{pmatrix}$

→ Mit deutlich mehr Rechenaufwand auch wieder $\mathbf{p}\{\mathbf{e_i}\}$ mit Ursprung **1**.

C

➔ Ein **"allgemeines Rezept"** für diesen Fall (**System 2 verschoben und gedreht**)
Einschränkung: beide Achsensystem orthonormal

Verschiebung **v** (in Koordinaten von **1**)
Drehung α, Drehmatrix **D** (**2** um α relativ zu **1** gedreht)

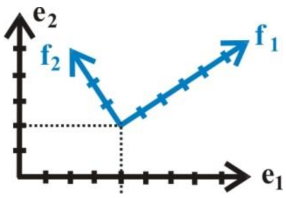
1) Gegeben **p**(in **1**); gesucht **p**(in **2**)
⇒ 1. $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{v}$ Verschiebung, damit **O**(**2**) Ursprung wird; Koordinaten in {$\mathbf{e_i}$}
⇒ 1. $\mathbf{p}(\text{in } \mathbf{2}) = \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{p}'$ Drehung um -α um **O**(**2**); damit Koordinaten in {$\mathbf{f_i}$} erzeugt.

2) Gegeben **p**(in **2**); gesucht **p**(in **1**)
⇒ 1. $\mathbf{p}' = \mathbf{D}\,\mathbf{p}$ Drehung um α um **O**(**2**); damit Koordinaten in {e_i} erzeugt.
⇒ 2. $\mathbf{p}(\text{ in } \mathbf{1}) = \mathbf{p}' + \mathbf{v}$ Verschiebung, damit **O**(**1**) Ursprung wird.

➔ Man kann sich das mit einer zusätzlichen Schreibweise **noch leichter merken**:
D Matrix für Drehung um α - $\underline{\mathbf{2}}$ relativ zu $\underline{\mathbf{1}}$
$\underline{\mathbf{T}}$ Vektoraddition **+v** für Translation - Koordinaten von **v** in **1**, $\{\mathbf{e_i}\}$
Die Umkehrung (das Inverse): $\mathbf{D}^{-1} \equiv \mathbf{D}$ für -α, $\underline{\mathbf{T}}^{-1}$ Vektoraddition **-v**
Anwendung der Operationen "von rechts nach links"

1) $\mathbf{p}(\text{in } \underline{\mathbf{2}}) = \mathbf{D}^{-1}\, \underline{\mathbf{T}}^{-1}\, \mathbf{p}(\text{in } \underline{\mathbf{1}})$
2) $\mathbf{p}(\text{in } \underline{\mathbf{1}}) = \underline{\mathbf{T}}\, \mathbf{D}\, \mathbf{p}(\text{in } \underline{\mathbf{2}})$

D)



Übung zum Verständnis: $\underline{\mathbf{1}}$ und $\underline{\mathbf{2}}$ wie vorher; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$
bekannt $\mathbf{p}(\text{in } \underline{\mathbf{1}}) = \begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$; gesucht $\mathbf{p}(\text{in } \underline{\mathbf{2}})$
4 "Lösungen" werden angegeben. Welche ist richtig?
Warum sind die anderen falsch?

	1. Schritt	Zwischenresultat **p'**	2. Schritt	Endresultat $\mathbf{p}(\text{in } \underline{\mathbf{2}})$
a)	**D**(+α)	$\begin{pmatrix}2{,}70\\7{,}33\end{pmatrix}$	**- v** bzw. $\underline{\mathbf{T}}^{-1}$	$\begin{pmatrix}-1{,}30\\5{,}33\end{pmatrix}$
b)	**D**(-α)	$\begin{pmatrix}7{,}70\\1{,}33\end{pmatrix}$	**- v** bzw. $\underline{\mathbf{T}}^{-1}$	$\begin{pmatrix}3{,}70\\-0{,}67\end{pmatrix}$
c)	**- v** bzw. $\underline{\mathbf{T}}^{-1}$	$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$	**D**(+α)	$\begin{pmatrix}0{,}23\\3{,}60\end{pmatrix}$
d)	**- v** bzw. $\underline{\mathbf{T}}^{-1}$	$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$	**D**(-α)	$\begin{pmatrix}3{,}23\\1{,}60\end{pmatrix}$

• Richtig ist in allen Fällen die Verschiebung. Das System $\underline{\mathbf{2}}$ ist um **+v** relativ zu $\underline{\mathbf{1}}$ verschoben. **p** muss "kontragredient" verschoben werden, also um **-v**.

• Bei a) und b) ist die Reihenfolge falsch. Die Drehung muss relativ zu **O**($\underline{\mathbf{2}}$) erfolgen. Wenn die Drehung als 1. Schritt erfolgt, geschieht sie aber mit dem Fixpunkt **O**($\underline{\mathbf{1}}$). Fixpunkt ist immer der Ursprung des Systems, in dem die Koordinaten von **p** definiert sind, und dies ist am Anfang System $\underline{\mathbf{1}}$.

• c) ist falsch, weil auch "kontragredient" gedreht werden muss. $\underline{\mathbf{2}}$ ist um +α relativ zu $\underline{\mathbf{1}}$ gedreht. Eine Drehung um -α transformiert einen Punkt!

• Bei d) wird im 1. Schritt **p** so verschoben, dass **O**($\underline{\mathbf{2}}$) der neue Ursprung ist. Im 2. Schritt wird um diesen Fixpunkt gedreht. {Das entspricht $\mathbf{p}(\text{in } \underline{\mathbf{2}}) = \mathbf{D}^{-1}\, \underline{\mathbf{T}}^{-1}\, \mathbf{p}(\text{in } \underline{\mathbf{1}})$}

! Transformationen durch Translation oder Rotation allein, sind problemlos. Bei der Verknüpfung Translation + Rotation sind (leider) zu beachten:
a) Gleiche Systeme bei der Translation!
b) Was ist der Fixpunkt der Drehung?

Irgendwie erscheint das für Transformationen nicht "elegant".

Störend ist vor allem, dass die Translation und Rotation mit unterschiedlichen Rechnungen (Vektoraddition / Matrix·Vektor-Multiplikation) zu behandeln sind.

In der Tat wurde für diese Problematik der Transformationen eine Lösung gefunden. Dann können alle Transformation einheitlich (mit Matrix·Vektor-Multiplikation) behandelt werden. Die Grundideen davon werden im Kapitel "Homogene Koordinaten" besprochen.

Im Zusammenhang mit "üblichen" Aufgaben der "Analytischen Geometrie" kommen solche Koordinatentransformationen eher selten vor und der bisherige, gewohnte Formalismus reicht aus! Eine allgemeine Besprechung verknüpfter Transformationen, aber ohne Translation, findet man - bei Interesse - unter "Mathematik - Lineare Algebra, Kapitel V06".