## Drehung einer Geraden in die x-Achse bzw. in eine andere Gerade

### 1.) Welcher Winkel dreht eine Gerade in Richtung der x-Achse?

Standard Lösung: In g: $y = mx + b$ ist $m = \tan(\alpha)$.
Eine Gerade wird mit $-\alpha$ so gedreht, dass sie in der x-Achse liegt.
Wir versuchen eine Verifikation durch eine Behandlung mit Vektoren.

### Verfahren 1: Drehwinkel aus m bzw. m = Δy/Δx.

#### A - Positive Steigung

**y = 2x + 1**; Zwei Punkte auf der Geraden $\mathbf{p_1} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{p_2} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$;

Richtungsvektoren $\mathbf{v_1} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \mathbf{p_1} - \mathbf{p_2} = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

Winkel zwischen $\mathbf{v_i}$ und +x-Achse: $\alpha = \arctan(2) = 63{,}4349°$
Es muss mit $-\alpha$ gedreht werden, um $\mathbf{v_i}$ in Richtung +x-Achse zu drehen.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(-\alpha) = \begin{pmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D\,v_1} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}4472 & 0{,}8944\\ -0{,}8944 & 0{,}4472\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4{,}4721\\0\end{pmatrix}$$

☑ zeigt in Richtung +x-Achse.

$$\mathbf{D\,v_2} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4{,}4721\\0\end{pmatrix}$$

☑ zeigt in Richtung -x-Achse.

#### B - Negative Steigung

**y = -2x + 1**; $\mathbf{p_1} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; $\mathbf{p_2} = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$; $\mathbf{v_1} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1} = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \mathbf{p_1} - \mathbf{p_2} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

$\alpha = \arctan(-2) = -63{,}4349°$; Drehung mit $-\alpha$.

$$\mathbf{D\,v_1} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}4472 & -0{,}8944\\ 0{,}8944 & 0{,}4472\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4{,}4721\\0\end{pmatrix}$$

☑ zeigt in Richtung +x-Achse.

$$\mathbf{D\,v_2} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4{,}4721\\0\end{pmatrix}$$

☑ zeigt in Richtung -x-Achse.

⇒ Für positive <u>und</u> negative Steigung <u>und</u> für beide entgegengesetzt gerichteten Vektoren in Geradenrichtung folgt nach der Drehung ein Vektor in Richtung ± x-Achse.
Wie gefordert, liegt dann die Gerade in der x-Achse; die Richtung der gedrehten Vektoren $\mathbf{v_i}$ ist unwichtig, diese waren nur ein Hilfsmittel für unsere Rechnung.

⇒ Der Drehwinkel $\alpha$ wird aus einem Steigungsdreieck ermittelt; $m = \tan(\alpha) = \Delta y/\Delta x$
Wenn man die Richtungen betrachtet:
Für eine positive Steigung ($\alpha > 0$) ist $\Delta y > 0$ und $\Delta x > 0$.
Für eine negative Steigung ($\alpha < 0$) ist $\Delta y > 0$ und $\Delta x < 0$.

⇒ Wenn der Drehwinkel $\alpha$ über m bestimmt wird, folgt die korrekte Drehung, egal ob als Vektor $\mathbf{v_1}$ oder $\mathbf{v_2}$ eingesetzt wird! Es ändert sich dann nur das Vorzeichen in $\Delta x$ <u>und</u> $\Delta y$ und m bleibt gleich!

## Verfahren 2: Drehwinkel aus Skalarprodukt

Der Winkel zwischen zwei Vektoren **a** und **b** ist über das Skalarprodukt zu erhalten:
cos(α) = **a•b** / |**a**| |**b**|

### A - Positive Steigung

$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

Winkel mit +x-Achse, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\mathbf{v_1}\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2$; $\cos(\alpha) = 2 / \sqrt{20} = 1 / \sqrt{5}$; $\alpha = 63{,}4349°$

☑ **D v₁** wurde oben berechnet, zeigt korrekt in +x-Achse

$\mathbf{v_2}\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -2$; $\cos(\alpha) = -1 / \sqrt{5}$; $\alpha = 116{,}5651°$ {→ Drehung um -α}

$\mathbf{D\ v_2} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}4472 & 0{,}8944\\ -0{,}8944 & -0{,}4472\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2{,}6833\\ 3{,}5777\end{pmatrix}$

☒ **D v₂** zeigt nicht in Richtung ± x-Achse!
Korrekt wäre ein Drehwinkel 180° - 116,5651° = 63,4349°.
{Die Vorschrift, oft im Internet zu finden, der Betrag des Skalarprodukts ist zu verwenden, liefert auch den richtigen Drehwinkel.}

### B - Negative Steigung

$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

Winkel mit +x-Achse, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\mathbf{v_1}\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2$; $\cos(\alpha) = 1 / \sqrt{5}$; $\alpha = 63{,}4349°$

$\mathbf{D\ v_1} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}4472 & 0{,}8944\\ -0{,}8944 & 0{,}4472\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2{,}6833\\ -3{,}5777\end{pmatrix}$

☒ **D v₁** zeigt nicht in Richtung ± x-Achse!
{Die Verwendung des Betrags des Skalarprodukts ändert nichts am Fehler!}

$\mathbf{v_2}\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -2$; $\cos(\alpha) = -1 / \sqrt{5}$; $\alpha = 116{,}5651°$

$\mathbf{D\ v_2} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}4472 & 0{,}8944\\ -0{,}8944 & -0{,}4472\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4{,}4721\\ 0\end{pmatrix}$

☑ zeigt in Richtung +x-Achse.

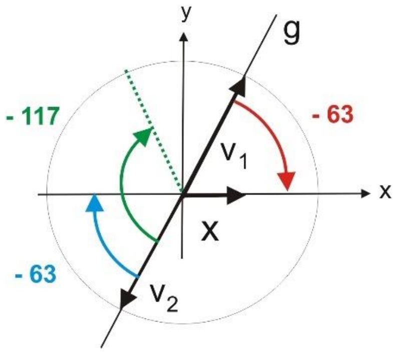
**Veranschaulichung der Ergebnisse bei Rechnung über das Skalarprodukt**

*Positive Steigung*

**$v_1$** mit $\alpha = 63°$ wird mit **-63° richtig** auf die +x-Achse gedreht.

**$v_2$** mit $\alpha = 117°$ wird mit **-117°** an eine **falsche** Position gedreht.

**$v_2$** **würde** mit **-63° richtig** auf die -x-Achse gedreht.



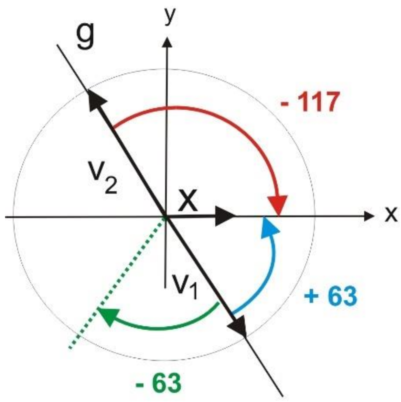

*Negative Steigung*

**$v_1$** mit $\alpha = 63°$ wird mit **-63°** an eine **falsche** Position gedreht.

**$v_1$** **würde** mit **+63° richtig** auf die +x-Achse gedreht.

**$v_2$** mit $\alpha = 117°$ wird mit **-117° richtig** auf die +x-Achse gedreht.

{hier wäre auch möglich um +63° auf die -x-Achse zu drehen.}




Wir erhalten (selbstverständlich) auch mit dem Skalarprodukt richtige Winkel zwischen den Vektoren. Ebenso ist die Vorschrift, den Betrag des Skalarprodukts zu verwenden, richtig um den spitzen Winkel zwischen zwei Geraden zu berechnen. Für die Anwendung auf die "Drehung einer Geraden in die x-Achse" müssen wir aber weitere Fallunterscheidungen vornehmen. Daher ist die Berechnung über $\tan(\varphi) = m$ dafür die bevorzugte Methode!

## 2. Drehung in eine andere Gerade

Zwei Geraden $g_1$ und $g_2$ sind gegeben. Welches sind die neuen Punkte auf $g_2$ für einen Punkt auf $g_1$, wenn $g_1$ in $g_2$ gedreht wird?

Sei $g_1$: $y = m_1 x + b_1$ und $g_2$: $y = m_2 x + b_2$.

Der Winkel $\varphi$ zwischen den Geraden ist dann $\varphi_1 - \varphi_2 = \arctan(m_1) - \arctan(m_2)$.

{Zusammenfassungen wären möglich, z.B. für $m_1 m_2 > -1$: $\varphi 1 - \varphi 2 = \arctan[(m_1 - m_2)/(1 + m_1 m_2)]$.}

Ohne weitere Präzisierung ist dabei immer gemeint, dass die Drehung um den Schnittpunkt der Geraden erfolgt.

Schnittpunkt: $y_S = m_1 x_S + b_1 = m_2 x_S + b_2 \rightarrow (m_1 - m_2)\, x_S = (b_2 - b_1)$

Das Vorgehen ist damit:

Berechnung von $\varphi$, Verschieben des Schnittpunkts in den Koordinatenursprung, Drehung um $-\varphi$, Zurückverschiebung.

Ein Zahlenbeispiel ist sinnvoll. Entscheidend ist, dass üblicherweise als "Winkel zwischen zwei Geraden" nur der Betrag des spitzen Winkels zwischen diesen angegeben wird. Wir benötigen aber für die Transformationen Winkel mit Betrag <u>und</u> Richtung!

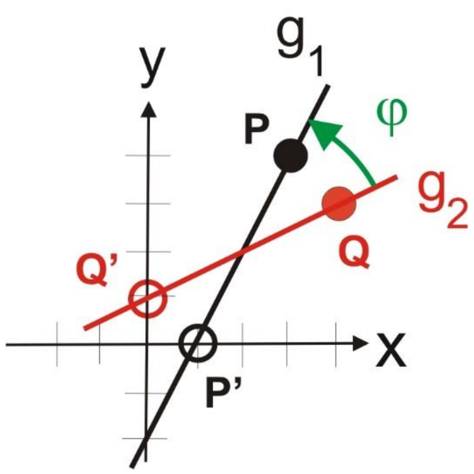
**Beispiel 1** (2 Geraden mit positiver Steigung)

$g_1$: $y = 2x - 2$; $g_2$: $y = 0{,}5x + 1$;
auf $g_1$ liegt der Punkt **P**(3 | 4).
Gesucht ist der Punkt **Q**, wenn $g_1$ in Richtung $g_2$ gedreht wird.

$\varphi = \arctan(2) - \arctan(0{,}5) \approx 63{,}43° - 26{,}57° = 36{,}87°$
(genauer: 36,8699°)

$\varphi$ gibt dabei an, welchen Winkel $g_1$ bezogen auf $g_2$ hat. Damit wird $g_1$ mit dem Winkel $-\varphi$ in die Richtung von $g_2$ gedreht.

Schnittpunkt **S**:
$x_S = [1 - (-2)] / [2 - 0{,}5)] = 2$;
$y_S = 2 \cdot 2 + (-2) = 2$.




*<u>Berechnung:</u>*

• Verschieben **S** in den Koordinatenursprung ⇒ Verschieben **P** um **-s**

$\mathbf{p} - \mathbf{s} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

• Drehung um $\alpha = -\varphi$

$\mathbf{p}_{\text{Zwischen}} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}6\\ -0{,}6 & 0{,}8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

• Zurückverschieben um **+s**

$\mathbf{q} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$

Neben dem Punkt **Q**(4 | 3) liegt auch der Punkt **Q'** auf der Geraden $g_2$. Dieser entsteht, wenn um 180° weiter gedreht wird.

{Die Gerade ist für von "unten nach oben" und von "oben nach unten" dieselbe.}

Explizit ist für $\alpha = -(\varphi + 180°) \approx 216{,}87°$

$\mathbf{p'}_{\text{Zwischen}} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}8 & -0{,}6\\ 0{,}6 & -0{,}8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

$\mathbf{q'} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$

Dies ist auch der Spiegelpunkt von **Q** am Schnittpunkt **S**.

Explizit: **Q** verschoben: $\binom{4}{3}$ - $\binom{2}{2}$ = $\binom{2}{1}$; am Ursprung gespiegelt $\binom{-2}{-1}$;

zurück verschoben $\binom{-2}{-1}$ + $\binom{2}{2}$ = $\binom{\mathbf{0}}{\mathbf{1}}$

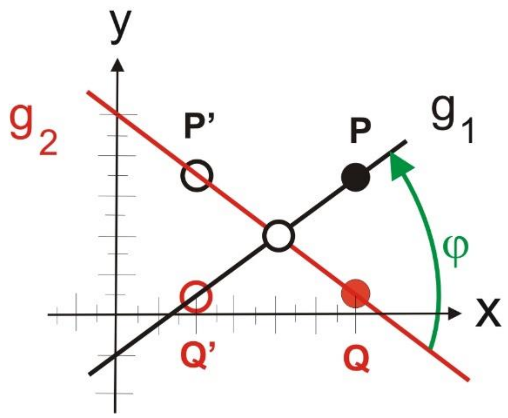
Eine mögliche Kontrolle ist, zu zeigen, dass die Drehung von $g_2$ in $g_1$ aus **Q** den Punkt **P** liefert; zusätzlich den neuen Spiegelpunkt **P'**

Dann ist $\varphi$ = arctan(0,5) - arctan(2) ≈ - 36,87°; **S** ist gleich.

- Verschieben um **-s**: **q - s** = $\binom{4}{3}$ - $\binom{2}{2}$ = $\binom{2}{1}$
- Drehung um -φ = +36,87°: $\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}\binom{2}{1} = \binom{1}{2}$
- Zurückverschieben um **+s**: $\binom{1}{2}$ + $\binom{2}{2}$ = $\binom{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ ≡ **p**
- Spiegelpunkt **P'**: $\binom{3}{4}$ - $\binom{2}{2}$ = $\binom{1}{2} \rightarrow \binom{-1}{-2} \rightarrow \binom{-1}{-2}$ + $\binom{2}{2}$ = $\binom{\mathbf{1}}{\mathbf{0}}$

**Beispiel 2** (2 Geraden mit einmal positiver und einmal negativer Steigung)

$g_1$: y = 0,75 x -2;
$g_2$: y= -0,75 x + 10;
auf $g_1$ liegt der Punkt **P**(12 | 7).
Gesucht ist der Punkt **Q**, wenn $g_1$ in Richtung $g_2$ gedreht wird.




$\varphi$ = arctan(0,75) - arctan(-0,75) ≈ 73,74°

$g_1$ wird mit dem Winkel -φ in die Richtung von $g_2$ gedreht.

Schnittpunkt **S**:
$x_S$ = [10 - (-2)] / [0,75 - (- 0,75)] = 8;
$y_S$ = 0,75 · 8 + (-2) = 4.

<u>*Berechnung:*</u>

- Verschieben **S** in den Koordinatenursprung ⇒ Verschieben **P** um **-s**

**p - s** = $\binom{12}{7}$ - $\binom{8}{4}$ = $\binom{4}{3}$

- Drehung um α = -φ

$\mathbf{p}_{\mathbf{Zwischen}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\binom{4}{3} = \begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}96 \\ -0{,}96 & 0{,}28 \end{pmatrix}\binom{4}{3} = \binom{4}{-3}$

- Zurückverschieben um **+s**

**q** = $\binom{4}{-3}$ + $\binom{8}{4}$ = $\binom{\mathbf{12}}{\mathbf{1}}$

**Q(12 | 1)**

Für die Berechnung von **Q'** Drehung von **P** um 180° weiter.

α = - (φ + 180°) ≈ -253,74°; **p - s** = $\binom{4}{3}$

Drehung des um **-s** verschobenen **p**:

$\mathbf{p'}_{\mathbf{Zwischen}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\binom{4}{3} = \begin{pmatrix} -0{,}28 & -0{,}96 \\ 0{,}96 & -0{,}28 \end{pmatrix}\binom{4}{3} = \binom{-4}{3}$

Rückverschiebung um **+s: q'** = $\binom{-4}{3}$ + $\binom{8}{4}$ = $\binom{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}$

Verifikation von **Q'** als Spiegelpunkt zu **Q** {**- s** $\rightarrow$ Spiegelung $\rightarrow$ + **s**}

$\begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{7}\end{pmatrix}$

**Q** auf $g_2$ liefert nach der Drehung $g_2$ in $g_1$ wieder **P** und den Spiegelpunkt **P'(4 | 1).**

- dabei $\varphi$ = -73,74°!
- gleich (wie in Beispiel 1) bleiben: $\alpha = -\varphi$ für **P** und $\alpha = -(\varphi + 180°)$ für **P'**}

**Anmerkung**

> Auch wenn es nur um den Zusammenhang zwischen 2 Geraden handelt, wird im Rechenweg nicht nur Betrag des Winkels, sondern auch jeweils die relative Orientierung der Geraden berücksichtigt.

## Behandlung mit homogenen Koordinaten

Selbstverständlich ist das kein Vorteil, wenn als Aufgabe nur die Drehung eines Punkts betrachtet wird. Wichtig wäre das, wie mehrere Punkte mit einer bestimmten Lage zu $g_1$ sich transformieren, wenn $g_1$ in die Richtung von $g_2$ gedreht wird.

Wie vorher gilt: Berechnung von $\varphi$, Verschieben des Schnittpunkts in den Koordinatenursprung, Drehung um $-\varphi$, Zurückverschiebung.

$g_1$: $y = m_1 x + b_1$; $g_2$: $y = m_2 x + b_2$; auf1 $g_1$ liegt der Punkt $\mathbf{P}(x_P \mid y_P)$.
Gesucht ist der Punkt **Q**, wenn $g_1$ in Richtung $g_2$ gedreht wird.

Am einfachsten: $\varphi = \arctan(m_2) - \arctan(m_1)$

Der benötigte Schnittpunkt $\mathbf{S}(x_S \mid y_S)$ folgt aus

$x_S = (b_2 - b_1) / (m_1 - m_2)$ und $y_S = m_1 x_S + b_1$ oder $y_S = (m_1 b_1 - m_2 b_1) / (m_1 - m_2)$

Verschiebung von **S** in den Koordinatenursprung: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -x_S\\0 & 1 & -y_S\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Rückverschiebung: $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & x_S\\0 & 1 & y_S\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Drehung um $\alpha = -\varphi$: $\mathbf{D} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{D}\,\mathbf{T} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & x_S - x_S\cos(\alpha) + y_S\sin(\alpha)\\\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & y_S - x_S\sin(\alpha) - y_S\cos(\alpha)\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Mit den Zahlenwerten des Beispiels 2 ist:

$\mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{D}\,\mathbf{T}\,\mathbf{P} = \begin{pmatrix}0{,}28 & 0{,}96 & 1{,}92\\-0{,}96 & 0{,}28 & 10{,}56\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 12\\0 & 1 & 7\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}28 & 0{,}96 & \mathbf{12{,}00}\\-0{,}96 & 0{,}28 & \mathbf{1{,}00}\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbf{Q}$