## Koordinatentransformation

Vereinbarung zur Nomenklatur: Bei mehrfachen Transformationen wird die übliche Leserichtung "von links nach rechts" benutzt.
{Im Folgenden sind Zahlenangaben jeweils gerundet}

### Koordinaten Transformation (Wiederholung für Einsteiger)

{Behandlung in $R^2$}

#### *1. Translation*

Gegeben seien 2 Koordinatensysteme mit gleicher Orientierung.

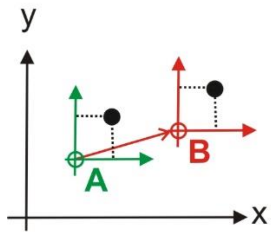
Ein Punkt **P** hat im System **A** die Koordinaten $\mathbf{p} = \binom{3}{4}$.

{In der Skizze ist dafür der Koordinatenursprung **A** gezeichnet.}

Ein System **B** ist um $\mathbf{t} = \binom{8}{3}$ gegenüber **A** verschoben.

(Triviale) Verständnisfrage: Welche Koordinaten hat der Punkt **P** im System **B**, wenn der Ursprung (von **A** nach **B)** und der Punkt **P** um **t** verschoben werden? Natürlich dieselben!

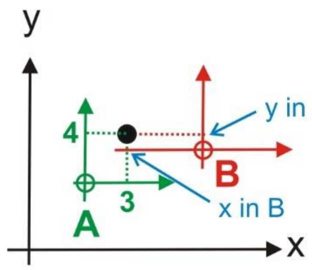
{Koordinaten sind stets Angaben der Entfernung relativ zum Ursprung des Systems.}




Welche Koordinaten hat **P** im System **B**, wenn der Punkt an derselben Stelle (bezüglich eines übergeordneten Systems) bleibt?

Wenn nur der Ursprung verschoben wird, also **b** = **a** + **t** ist, gilt für die Punktkoordinaten
**p'** = **p** - **t**.

{$\mathbf{p'} = \binom{-5}{1}$ }{"kontragrediente" Transformationen}




Da nur Additionen der Koordinaten vorkommen, ist unmittelbar einsichtig, dass bei Wiederholungen die Translationen additiv sind.

Kommt man von **A** nach **B** durch $+\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$ gilt für den Punkt $\mathbf{p'} = \mathbf{p} - \mathbf{t_1} - \mathbf{t_2}$.

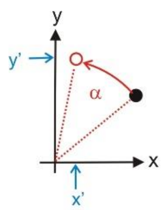
#### *2. Rotation*

Wird ein Punkt **P** um einen Winkel α gedreht, lässt sich die Drehung **D**(α) unter Verwendung einer Matrix einfach berechnen.

$$\mathbf{p'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{D}(\alpha)\,\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

{Dabei gelten Konventionen: Positiver Winkel bedeutet eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn und die Drehung erfolgt um den Koordinatenursprung.}

Drehung Punkt um $\alpha = 40°$; $\mathbf{p} = \binom{5}{4}$; $\mathbf{p'} = \binom{1{,}26}{6{,}28}$



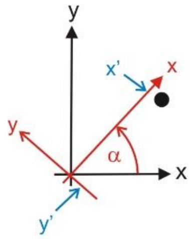
Wie bei der Translation erwarten wir, dass bei einer Drehung des Koordinatensystems (um den Ursprung) um $+\alpha$ für die Koordinaten eines Punkts eine Drehung um $-\alpha$ zu berechnen ist. {"kontragredient"}

Drehung Achsensystem um $\alpha = 40°$;

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{p'} = \begin{pmatrix} 6{,}40 \\ 0{,}15 \end{pmatrix}$

Ausgangssystem $\quad$ gedrehtes System

Der Punkt bleibt an derselben Stelle.




{Zu beachten ist, dass die Koordinaten dann **im** gedrehten System abzulesen sind! In Bezug auf ein übergeordnetes System bleibt der Punkt an derselben Stelle. Die Zahlenangaben "Koordinaten" beziehen sich aber jeweils auf ein Koordinatensystem und ändern sich.}

Zwei nacheinander durchgeführten Drehungen $\mathbf{D}(\alpha)\,\mathbf{D}(\beta)$ bewirken (unmittelbar anschaulich) dasselbe wie eine Drehung $\mathbf{D}(\alpha + \beta)$.

{Eine Rechenübung ist, dass dies bei einer Multiplikation der Matrizen bestätigt wird. Beim Vergleich müssen nur die Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ beachtet werden.}

Ebenso (unmittelbar anschaulich) einsichtig ist, dass wenn ein um $\alpha$ gedrehtes System "1" und ein um $\beta$ gedrehtes System "2"vorliegen, eine Drehung vom System "1" in das System "2" eine Drehung um den Differenzwinkel $\beta - \alpha$ ist.

Wenn wir den Alltagsausdruck "inverse Operation" in den mathematischen Formalismus übersetzen und $\mathbf{D}^{-1}$ als inverse Matrix zu $\mathbf{D}$ benennen, zeigt sich, $\mathbf{D}^{-1}(\alpha)$ gleich $\mathbf{D}(-\alpha)$ ist.

{"Rechenübung" wäre hier der Fall Drehung und danach Rückwärtsdrehung.

Dann sieht man, dass $\mathbf{D}(\alpha)\,\mathbf{D}^{-1}(\alpha) = \mathbf{D}(\alpha)\,\mathbf{D}(-\alpha) = \mathbf{E}$.

$\mathbf{E}$ ist die Einheitsmatrix, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Anwendung von $\mathbf{E}$ ändert die Punktkoordinaten nicht.}

## ***3. Kombination Translation / Rotation***

> Üblicherweise sagt man, ein Punkt ist "gedreht und zusätzlich weiter entfernt". Für eine Rechnung muss man etwas präziser sein. Die Reihenfolge der beiden Transformationen spielt eine Rolle. Auch der Drehpunkt muss beachtet werden. Bezogen auf die Alltagssprache sollte aber stets derselbe Endpunkt erhalten werden.

Ohne lange Überlegungen sieht man, dass die Kombination "**DT"** - zuerst Drehung dann Translation - nichts Neues bringt. Der erste Schritt ist eine Rotation des Punkts **P** um den Ursprung. Im zweiten Schritt wird eine Translation vom erreichten Zwischenpunkt an den Endpunkt Q durchgeführt.

{Die Vorgabe aus der Alltagssprache ist voll erfüllt.}

Interessant ist die Kombination "**TD"** - zuerst Translation dann Drehung dann Translation. Zu beachten ist: Unsere Rechenvorschrift - Anwendung der Matrix **D** - setzt voraus, dass damit eine Drehung um den Koordinatenursprung beschrieben wird.

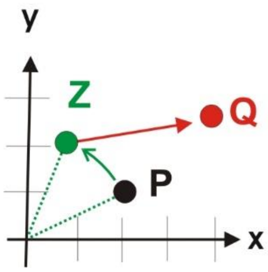
♦ Wenn wir einfach **T D** rechnen, folgt ein anderer Punkt als bei der Operation **D T**!

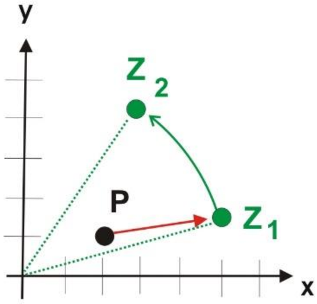
Die Drehung geschieht für den nach der Translation erreichten Punkt.

{Zur Veranschaulichung unten Skizzen.}

♦ Wenn wir denselben Endpunkt wie für **D T** erreichen wollen, überlegen wir. In unserem Formalismus haben wir nur eine Drehmatrix **D** für eine Drehung um den Ursprung!
Einsichtig ist folgender Weg: Wir sorgen dafür, dass wir den Ursprung als Drehpunkt haben, drehen und gehen dann wieder zurück. Für diese Hin- und Rückverschiebung wird eine Translation $\mathbf{T}_2$ verwendet. In Formeln rechnen wir dann also anstelle von $\mathbf{T}\,\mathbf{D}$ etwas länger $\mathbf{T}\,\mathbf{T}_2^{-1}\,\mathbf{D}\,\mathbf{T}_2$.

Es bleibt die Frage, was nun $\mathbf{T_2}$ ist. Für <u>einen</u> Punkt allein ist das ganz einfach. Mit $\mathbf{T^{-1}}$ wird der Punkt **P** in den Ursprung verschoben. Damit ist einfach $\mathbf{T_2} = \mathbf{T}$. In $\mathbf{T\,T^{-1}\,D\,T}$ folgen **T** und $\mathbf{T^{-1}}$ dann direkt nacheinander. Dies bedeutet, dass wir auf diese beiden Wanderungen verzichten können. Im Fall "**TD**" also bei <u>richtiger</u> Durchführung von **D** dasselbe Resultat wie vorher für "**DT**"!




| "**DT**" | "**TD**" |
|---|---|
| 1. Drehung liefert Zwischenpunkt **Z** | 1. Translation liefert Zwischenpunkt $\mathbf{Z_1}$ |
| 2. Translation liefert Endpunkt **Q** | 2. Drehung liefert Zwischenpunkt $\mathbf{Z_2}$ (nicht **Q**!) |

Wenn wir für "**TD**" <u>richtig</u> rechnen, also $\mathbf{T\,T^{-1}\,D\,T}$ verwenden, bedeutet das bildlich im ersten Teil $\mathbf{T\,T^{-1}}$ eine Rückverschiebung von $\mathbf{Z_1}$ nach P. Dann liegt wieder dieselbe Situation wie im linken Bild vor, und die Fortführung ist auch bildlich **D T**.

<u>*Zahlenbeispiel*</u> (passend zur Skizze)

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\mathbf{t} = \begin{pmatrix}3\\0{,}5\end{pmatrix}$; $\alpha = 40°$.

"**DT**": $\mathbf{D\,p} = \begin{pmatrix}0{,}766 & -0{,}643\\0{,}643 & 0{,}766\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}889\\2{,}052\end{pmatrix}$; $+\,\mathbf{t}$: $\begin{pmatrix}\mathbf{3,889}\\\mathbf{2,552}\end{pmatrix} = \mathbf{q}$

"**TD**": $\mathbf{p} + \mathbf{t} = \begin{pmatrix}5\\1{,}5\end{pmatrix}$; $\mathbf{D}\,(\mathbf{p} + \mathbf{t}) = \begin{pmatrix}\mathbf{2,866}\\\mathbf{4,363}\end{pmatrix} = \mathbf{Z_2}$.

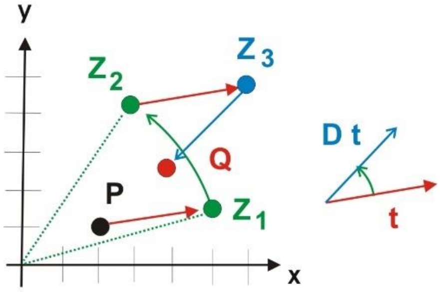
Die Rechnung für den richtigen Punkt **Q** brauchen wir nicht mehr durchzuführen.
**p** + **t** - **t** und dafür **D** ist dasselbe wie sofort **D p**.

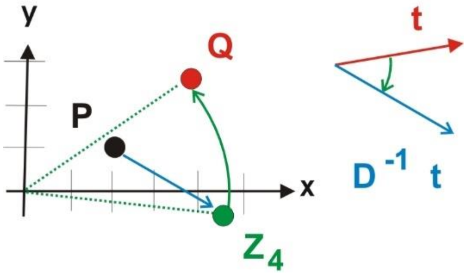
♦ Wie hängen der nicht gefragte Punkt $\mathbf{Z_2}$ und der gesuchte Endpunkt **Q** zusammen?

Mit einer kurzen formalen Betrachtung und aus der Skizze ist der Fehler erkennbar. In der Variante **T D** drehen wir bei der Drehung von $\mathbf{Z_1}$ mit **D** um den Ursprung. Es wird also auch der Translationsvektor **t** mitgedreht.

♦♦ **(1)** Eine erste Möglichkeit ist, hinterher zu korrigieren:
Im Fall "**DT**" ist das Ergebnis **D p** + **t**. {Keine Korrektur für "**DT**" nötig}
Im Fall "**TD**" wird **D** angewandt auf **p** + **t**. **D** (**p** + **t**) = **D p** + **D t**. {Distributivgesetz}
Wir müssen daher auf $\mathbf{Z_2}$ anwenden: **+ t** und **- D t**.
{Addieren der richtigen und Entfernen der falschen Terme.}
Dies ist in der Skizze auch ersichtlich.
{**D t** ist skizziert, und **- D t** zeigt dann in die Gegenrichtung.}

♦♦ **(2)** Eine zweite Möglichkeit ist, die fehlerhafte Drehung **D t** schon anfangs zu korrigieren: Anstelle von **t** addieren wir im ersten Schritt $\mathbf{D^{-1}\,t}$. Es entsteht der Zwischenpunkt $\mathbf{Z_4}$. Auf diesen können wir **D** anwenden. Dann folgt $\mathbf{D}\,(\mathbf{p} + \mathbf{D^{-1}\,t}) = \mathbf{D\,p} + \mathbf{D\,D^{-1}\,t} = \mathbf{D\,p} + \mathbf{t}$.
{Dies ist identisch zum Resultat für "**DT**".}




**(1)**: Korrektur von $\mathbf{Z_2}$
**+ t / - D t**

**(2)**: Änderung der 1. Translation
+ $\mathbf{D^{-1}}$ **t** statt + **t** / dann **D** auf $\mathbf{Z_4}$

im *Zahlenbeispiel*:

**"TD" (1)**: $\mathbf{z_2} = \begin{pmatrix} 2{,}866 \\ 4{,}363 \end{pmatrix}$; $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{D\,t} = \begin{pmatrix} 1{,}977 \\ 2{,}311 \end{pmatrix}$; $\mathbf{z_2 + t - D\,t} = \begin{pmatrix} 3{,}889 \\ 2{,}552 \end{pmatrix} = \mathbf{q}$ ☑

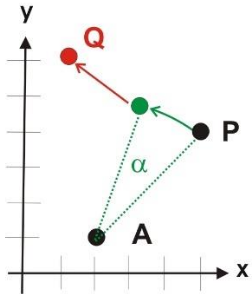
**"TD" (2)**: $\mathbf{D^{-1}\,t} = \begin{pmatrix} 0{,}766 & 0{,}643 \\ -0{,}643 & 0{,}766 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}620 \\ -1{,}545 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{p} + (\mathbf{D^{-1}\,t}) = \begin{pmatrix} 4{,}620 \\ -0{,}545 \end{pmatrix}$

$\mathbf{D}\,[\mathbf{p} + \mathbf{D^{-1}\,t}] = \begin{pmatrix} 0{,}766 & -0{,}643 \\ 0{,}643 & 0{,}766 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4{,}620 \\ -0{,}545 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}889 \\ 2{,}552 \end{pmatrix} = \mathbf{q}$ ☑

*Beispiel 2 Punkte*

Es liegen ein Anfangspunkt **A** und ein Punkt **P** vor. Nun soll als neuer Punkt **Q** entstehen: **P** ist mit dem Winkel α um **A** gedreht und eine Strecke **t** verschoben. In der Alltagssprache ist keine Reihenfolge festgelegt. Im Formalismus muss wieder beachtet werden, wie "**DT**" und "**TD**" zu errechnen sind.




Für die Anwendung von **D** brauchen wir jeweils den richtigen Drehpunkt. Eine erste Überlegung macht die Sache ganz einfach! Wenn wir als ersten Schritt alle Punkte so verschieben, dass **A** im Ursprung liegt, haben wir graphisch genau dieselbe Situation wie vorher (für <u>nur einen</u> Punkt P). Etwas mehr "mathematisch" gesprochen, führen wir eine Koordinatentransformation durch. Erst am Ende müssen wir diese umkehren, wenn die Koordinaten im Ausgangssystem gefragt sind.

Wir wählen den "üblichen" Weg, bei der Anwendung von **D** den richtigen Drehpunkt zu definieren.

**"DT"**: **D**(um **A**) → Translation **T**

. $\mathbf{T^{-1}}(\mathbf{a})\ \mathbf{D}\ \mathbf{T}(\mathbf{a})$ → Translation **T**

{Damit ist für die Drehung **D** als Drehpunkt **A** festgelegt.}

{Als Abkürzung können **T**(**a**) und **T** im Gesamtausdruck zusammengefasst werden.}

**"TD"**: "Elegantere" Variante (2)

Anstatt **T** gedrehtes **T** verwenden! → **D**(um **A**)

$\mathbf{T' = D^{-1}\,T}$ → $\mathbf{T^{-1}}(\mathbf{a})\ \mathbf{D}\ \mathbf{T}(\mathbf{a})$

*Zahlenbeispiel*

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$; $\mathbf{t} = \begin{pmatrix}-2\\1,5\end{pmatrix}$; $\alpha = 30°$

$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix}0,866 & -0,5\\0,5 & 0,866\end{pmatrix}$

Für die Rechnung mit Vektoren ist zu verwenden: **T(a)** ⇒ **a**, **T** ⇒ **t**

♦ Weg **"DT":**

$\mathbf{p} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{D}(\alpha)\ (\mathbf{p} - \mathbf{a}) = \begin{pmatrix}0,232\\3,598\end{pmatrix}$; $\mathbf{D}(\alpha)\ (\mathbf{p} - \mathbf{a}) + \mathbf{a} + \mathbf{t} = \begin{pmatrix}\mathbf{1,232}\\\mathbf{6,098}\end{pmatrix} = \mathbf{q}$

♦ Weg "**TD**" **(2)**:

gedrehtes $\mathbf{T} = \mathbf{T'} = \mathbf{D}(-\alpha)\ \mathbf{t} = \begin{pmatrix}0,866 & 0,5\\-0,5 & 0,866\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0,982\\2,299\end{pmatrix}$

$\mathbf{p} + \mathbf{t'} = \begin{pmatrix}4,018\\6,299\end{pmatrix}$;

$\mathbf{p} + \mathbf{t'} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}1,018\\5,299\end{pmatrix}$ {Vorbereitung für Drehung um A}

$\mathbf{D}(\alpha)\ (\mathbf{p} + \mathbf{t'} - \mathbf{a}) = \begin{pmatrix}0,866 & -0,5\\0,5 & 0,866\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1,018\\5,299\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1,768\\5,098\end{pmatrix}$;

$\mathbf{D}(\alpha)\ (\mathbf{p} + \mathbf{t'} - \mathbf{a}) + \mathbf{a} = \begin{pmatrix}1,232\\6,098\end{pmatrix} = \mathbf{q}$ {Rückgängigmachen der Verschiebung für die Anwendung von **D**}