Weitere Übungen

1. Zusammenhang Vektoren

Durch Einsetzen von Zahlen wurde gefunden, dass $+\ \mathbf{t} - \mathbf{D}\ \mathbf{t} = +\ \mathbf{D}^{-1}\ \mathbf{t}$ gilt.

Welcher Winkel α wurde bei diesem "Beweis" benutzt?
Welche geometrische Figur entsteht bei diesem "Beweis"?

Abgekürzt: c = cos(α), s = sin(α), $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\mathbf{D}^{-1}\ \mathbf{t} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca + sb \\ -sa + cb \end{pmatrix}$;

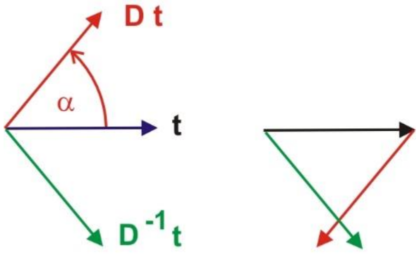
$\mathbf{D}\ \mathbf{t} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca - sb \\ sa + cb \end{pmatrix}$; $\mathbf{t} - \mathbf{D}\ \mathbf{t} = \begin{pmatrix} a - ca + sb \\ b - sa - cb \end{pmatrix}$

Vergleich x-Koordinate: ca + sb = a -ca + sb → 2 ca = a → c = 1/2

y-Koordinate: -sa + cb = b - sa - cb → 2 cb = b → c = 1/2

In der Tat, Gleichheit (nur) für cos(60°) = 1/2.

{Ein "tückischer Fehler", weil man zum Testen oft "schöne" Zahlen benutzt.}



Die drei Vektoren sind gleich lang!

Vergleich:
Nur bei einem Winkel α = 60° ist
$\mathbf{t} - \mathbf{D}(\alpha)\ \mathbf{t}$ gleich $\mathbf{D}(-\alpha)\ \mathbf{t}$

Für 60°:

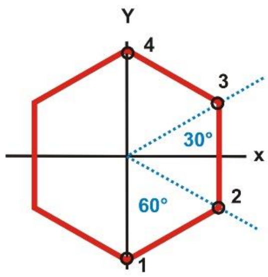
Der rote und der grüne Vektor zeigen auf denselben Endpunkt.
Als Seiten betrachtet haben wir dann ein gleichseitiges Dreieck.
{Dass darin die Winkel 60° sind, ist keine aufregend neue Erkenntnis!}

2. Beziehungen am Sechseck

Die Eckpunkte liegen auf einem Umkreis um den Ursprung. Erkennbar ist die Wiederholung von 30° und 60° Winkeln.

Erkennbar ist auch eine Spiegelung von Punkten um den Ursprung.

{Die Wahl des eingezeichneten Koordinatensystems erleichtert die nachfolgende Diskussion.}



Frage 1: Bestätigung, dass ein Weg von Punkt 1 nach 4 (über 2 und 3) äquivalent einer Spiegelung von 1 am Ursprung ist. {Übung zur Vektorrechnung}

Frage 2: Zeigt die Aufeinanderfolge von Drehungen (1 nach 2, 2 nach 3, 3 nach 4) dieselbe Äquivalenz. {Zusammenhang zwischen Drehungen, auch in einer Formulierung mit Drehmatrizen.}

<u>*Zu 1*</u>: Der Radius des Umkreises sei r. {r ist dann gleich dem Abstand vom Koordinatenursprung (= Mittelpunkt des Sechsecks) zu den 6 Eckpunkten.}

$\mathbf{v_1} = \overrightarrow{\mathbf{12}} = \begin{pmatrix} r\cos(30°) \\ r\sin(30°) \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \overrightarrow{\mathbf{23}} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_3} = \overrightarrow{\mathbf{34}} = \begin{pmatrix} -r\cos(30°) \\ r\sin(30°) \end{pmatrix}$

Summe $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ r + 2r\sin(30°) \end{pmatrix}$

Mit sin(30°) = 0,5 ist dies $\begin{pmatrix} 0 \\ 2r \end{pmatrix}$.

Der Vektor für die Spiegelung am Ursprung, $\overrightarrow{\mathbf{14}}$, ist gleich. {r nach oben / unten}.

<u>*Zu 2*</u>: Die Winkel zwischen 1 und 2, 2 und 3, und 3 und 4 sind jeweils 60°. Damit ist der Gesamtwinkel 180°. 180° ist auch der Winkel zwischen 1 und 4. {Als Ursprung für die Festlegung der Winkel gilt dabei die Strecke "Ursprung nach 1".}

Formale Übung ist nun die Verifikation mit Drehmatrizen. Die Aufgabe ist erleichtert, weil für alle Drehungen der zu definierende Drehpunkt der Koordinatenursprung ist. Ohne weitere Transformationen kann daher die Drehmatrix **D** direkt verwendet werden.

Wir drehen $\mathbf{v_1}$ nach $\mathbf{v_2}$ (und zweimal weiter) bis wir $\mathbf{v_4}$ erreichen. Die Zusammenfassung muss dann gleich einer einmaligen Drehung von $\mathbf{v_1}$ nach $\mathbf{v_4}$ sein.

Mit $\alpha = 60°$ formuliert:

$\mathbf{v_2} = \mathbf{D}(\alpha)\,\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mathbf{v_2}$. Analog $\mathbf{v_3} = \mathbf{D}(\alpha)\,\mathbf{v_2}$ und $\mathbf{v_4} = \mathbf{D}(\alpha)\,\mathbf{v_3}$

Insgesamt $\mathbf{v_4} = \mathbf{D}(\alpha)\,\mathbf{D}(\alpha)\,\mathbf{D}(\alpha)\,\mathbf{v_1}$.

Da für Drehmatrizen $\mathbf{D}(\alpha)\,\mathbf{D}(\beta) = \mathbf{D}(\alpha + \beta)$ gilt, ist insgesamt $\mathbf{v_4} = \mathbf{D}(3\alpha)\,\mathbf{v_1}$.

$D(180°) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

{Wer will kann als längere Übung die explizite Multiplikation der 3 Matrizen durchführen.}

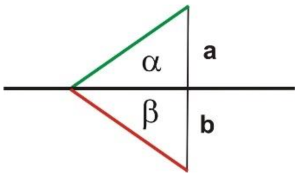
Diese Matrix ist identisch einer Matrix für eine Punktspiegelung am Ursprung.

Beispiel: Punkt 1 nach 4; oder allgemein:

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ +r \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

<u>3. Spiegelung an einer Geraden (Vorbereitung zu 4.)</u>

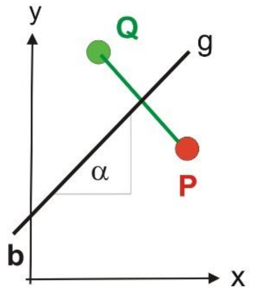
Triviale Einsicht:



Für die Spiegelung an der Geraden muss gelten: a = b und α = β. Oder: Nur wenn das gilt, bezeichnen wir diesen Zusammenhang als "Spiegelung".

Diese Skizze legt auch nahe, dass wir nur einfache Formeln haben, wenn die Spiegelungsachse parallel zu einer Koordinatenachse liegt. Dann muss nur jeweils für eine Koordinate das Vorzeichen invertiert werden.

Wenn wir im allgemeinen Fall eine Spiegelung des Punkts **P** durchführen wollen, ist ein möglicher Weg: Verschiebung der Geraden in eine Ursprungsgerade, Drehung damit die Gerade in Richtung der x-Achse liegt und dann Spiegelung. Um die Koordinaten des Spiegelpunkts **Q** im Original-Koordinatensystem zu erhalten, anschließend wieder der Rückdrehung und Rückverschiebung.



Für die Abfolge der Operationen

T(-b) → **D**(-α) → **S**(x) → **D**(+α) → **T**(+b) - jeweils nacheinander angewandt auf **p**

schreiben wir abgekürzt: **T**(-b) **D**(-α) **S**(x) **D**(+α) **T**(+b) {angewandt auf **p**}

Diese Abkürzung ist hier absichtlich benutzt, um auf eine mögliche Fehlerquelle beim Lesen anderer Quellen hinzuweisen!

Wir wissen außerdem, dass **T**(±b) als Addition von Vektoren und **D**(±α), **S**(x) als Multiplikation "Matrix x Vektor" berechnet werden.

Da in der Mitte 3 Multiplikationen "Matrix x Vektor" vorkommen, liegt eine Zusammenfassung der 3 Matrizen nahe.

Wir berechnen **C**(α, x) = **D**(-α) **S**(x) **D**(+α) vorab. {als Produkt von 3 Matrizen}

Dann wäre für die Transformation kürzer: **T**(-b) **C**(α, x) **T**(+b).

Die Vektoraddition und die Matrixmultiplikation können nicht mehr zusammengefasst werden. {Wie an anderer Stelle ausführlich erklärt, ist genau diese weitere Möglichkeit der Zusammenfassung der Vorteil von "homogenen Koordinaten".}

! Es zeigt sich dann aber, dass bei Verwendung der so definierten Produktmatrix **C**(α, x) nicht mehr der korrekte Spiegelpunkt **Q** - wie bei schrittweiser Durchführung der Ausgangsvorschrift - folgt!

Das hat nichts mit Drehungen und Spiegelungen zu tun, sondern wie Alltagssprache und mathematische Berechnungen zusammenhängen. Oben haben wird die gewählte Abkürzung (Leserichtung von links nach rechts) und die damit zusammenhängende Reihenfolge der Operationen schon genannt.

Die "Problematik" ist schnell einzusehen!

Nehmen wir an, auf einen Vektor **v** ist zuerst eine Transformation **A** und anschließend eine Transformation **B** anzuwenden. Beide Transformationen sollen sich als Produkt "Matrix x Vektor" ausdrücken lassen.
Dann ist durchzuführen:

1. **A v**
2. **B** (**A v**)

Nun wollen wir durch Zusammenfassen eine Gesamtoperation **C v** definieren.
Der Vergleich zeigt, dass (für die Matrizenmultiplikation) **C** = **B A** und nicht **C** = **A B**!

{ **!** Mit Verwendung der obigen abgekürzten Schreibweise sind damit äquivalent:

T(-b) **D**(-α) **S**(x) **D**(+α) **T**(+b) {Nacheinander Durchführung von Operationen!}

T(-b) **C**(α, x) **T**(+b) {Nacheinander Durchführung von Operationen!}

mit **C**(α, x) = **D**(+α) **S**(x) **D**(-α) {Hier aber Multiplikation von Matrizen!}

{Mathematische Anordnung "von rechts nach links" in **C**(α, x) beachtet.}

Operationen werden in der Alltagssprache von links nach rechts (Leserichtung) angeordnet. Beim Zusammenfassen von dazu benutzten Matrizen in eine Produktmatrix muss aber die mathematische Reihenfolge "von rechts nach links" benutzt werden.

Dies entspricht unserer allgemeinen Konvention für die Wiederholung von Funktionen (als abstrakte Abbildung). Wenn wir zuerst y = f(x) berechnen, und darauf - als zweites - y' = g(y) anwenden, ist y' = g (f(x)).
f(x) und g(y) sind in der mathematischen Durchführung "von rechts nach links" angeordnet.

Beim Lesen eines fremden Textes sollte aus dem Zusammenhang erkennbar sein, ob ein Nacheinander von Operationen oder eine mathematische Beziehung gemeint ist. Bei der Behandlung mit "homogenen Koordinaten" wird als Angabe stets eindeutig die mathematische Reihenfolge "von rechts nach links" geschrieben.

Für die Matrix **C**(α, x) zeigt die Zusammenfassung noch einen kürzeren Rechenweg.

S(x) **D**(-α) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

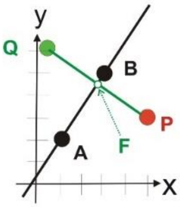
C(α, x) = **D**(+α) **S**(x) **D**(-α) $= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

Rechenbeispiel dazu, und Vergleich mit einer Behandlung mit "Lotfußpunkt".

Gerade durch die Punkte **A**(1|2) und **B**(3|5)
Punkt **P**(5|3)
Spiegelpunkt **Q**
Lotfußpunkt (für 2. Teil) **F**



Als allgemeine Geradengleichung y = mx + b:
m = Δy/Δx = 3/2; b = y - mx = 1/2; m = tan(α) → α = 56,31°; cos(α) = 0,555; sin(α) = 0,832
Schrittweise Berechnung: {gerechnet ungerundet, Angaben hier gerundet}

[1]: **p** + **T**(-b) = $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

[2]: **D**(-α) [1] = $\begin{pmatrix} 0{,}555 & 0{,}832 \\ -0{,}832 & 0{,}555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}854 \\ -2{,}774 \end{pmatrix}$

[3]: **S**(x) [2] = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4{,}854 \\ -2{,}774 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}854 \\ 2{,}774 \end{pmatrix}$

[4]: **D**(+α) [3] = $\begin{pmatrix} 0{,}555 & -0{,}832 \\ 0{,}832 & 0{,}555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4{,}854 \\ 2{,}774 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}385 \\ 5{,}577 \end{pmatrix}$

[5]: **q** = [4] + **T**(+b) = $\begin{pmatrix} 0{,}385 \\ 5{,}577 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,385} \\ \mathbf{6,077} \end{pmatrix}$

Mit Zusammenfassung zu **C**(α, x):

S(x) **D**(-α) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}555 & 0{,}832 \\ -0{,}832 & 0{,}555 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}555 & 0{,}832 \\ 0{,}832 & -0{,}555 \end{pmatrix}$

D(+α) **S**(x) **D**(-α) = $\begin{pmatrix} 0{,}555 & -0{,}832 \\ 0{,}832 & 0{,}555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}555 & 0{,}832 \\ 0{,}832 & -0{,}555 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}385 & 0{,}923 \\ 0{,}923 & 0{,}385 \end{pmatrix}$

Vergleich: Formel für **C**(α, x) = $\begin{pmatrix} -0{,}385 & 0{,}923 \\ 0{,}923 & 0{,}385 \end{pmatrix}$ ☑

Kürzere Berechnung :

[1]: **p** + **T**(-b) = $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

[2]: **C**(α, x) [1] = $\begin{pmatrix} -0{,}385 & 0{,}923 \\ 0{,}923 & 0{,}385 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}385 \\ 5{,}577 \end{pmatrix}$

[3]: **q** = [2] + **T**(+b) = $\begin{pmatrix} 0{,}385 \\ 5{,}577 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}385 \\ 6{,}077 \end{pmatrix}$ ☑

Lotfußpunktverfahren

a = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; **b** = $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; Richtungsvektor **u** =**b** - **a** = $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Damit Geradengleichung in Vektorschreibweise, in Parameterform **x** = t **u** + **a**

Das Lot auf **u** (Normale **n**) ist in R^2 sofort angebbar:

Vertauschung der Koordinaten und 1 Vorzeichenwechsel; **n** = $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ {oder $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$}

Berechnung der Spiegelung des Punktes **P**, **p** = $\binom{5}{3}$. Der Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt des Lots mit der Geraden.

Gerade $\quad$ Lot (durch **P**)

$\mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{u} + \mathbf{a}$ $\quad$ $\mathbf{x} = \mu\, \mathbf{n} + \mathbf{p}$

$\lambda \binom{2}{3} + \binom{1}{2}$ $\quad$ $\mu \binom{-3}{2} + \binom{5}{3}$

Gleichsetzen liefert das Gleichungssystem:

$2\,\lambda + 1 = -3\,\mu + 5 \wedge 3\,\lambda + 2 = 2\,\mu + 5$

Auflösung ist $\lambda = 11/13$ und $\mu = 10/13$.

Einsetzen in die Geraden- oder Lotgleichung liefert den Schnittpunkt (Lotfußpunkt) **F**,

$\mathbf{f} = \binom{35/13}{59/13}$

v sei der Lotvektor von **F** nach **P**, $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{FP}}$; $\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{f} = \binom{30/13}{-20/13}$

Der Spiegelpunkt **Q** liegt dann bei $\mathbf{q} = \mathbf{f} - \mathbf{v} = \binom{5/13}{79/13} \approx \binom{\mathbf{0,385}}{\mathbf{6,077}}$ ☑

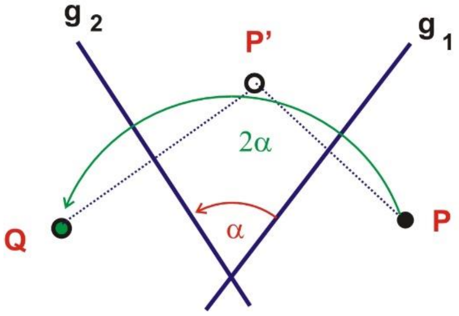
{Entgegengesetzte Richtung, gleiche Länge}

4. Zusammenhang Spiegelung / Drehung

Es gilt:

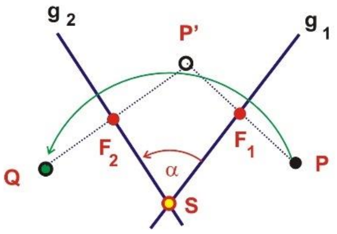
Wenn ein Punkt **P** nacheinander an 2 Geraden gespiegelt wird, die sich schneiden und einen Schnittwinkel α haben, ist dies äquivalent einer Drehung von **P** um den Geradenschnittpunkt mit dem Winkel 2α.

{Erste Möglichkeit: "Das zeigt die Skizze".
Zweite Möglichkeit: Vektorrechnung}



Zur ersten Möglichkeit

Zusätzlich zur Aussage, "das sieht man ja direkt", kann man etwas detaillierter argumentieren. Nun nochmals die vorige Skizze mit zusätzlichen Angaben.



Zwei Geraden mit Schnittpunkt **S**.
Der Schnittwinkel ist α.
P wird gespiegelt an der Geraden g_1 und dann an g_2.
$\mathbf{F_{1,2}}$ sind Schnittpunkte mit der Geraden ("Lotfußpunkte")

Aus den "Erkenntnissen" für die Spiegelung muss nun einiges gelten!

{Auf den Aufwand, jeweils Vektorpfeile anzugeben, wird verzichtet. Anstelle von $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ schreiben wir **AB**.}

Gleiche Abstände:

$|\mathbf{F_1P}| = |\mathbf{F_1P'}|$ und $|\mathbf{F_2P'}| = |\mathbf{F_2Q}|$

$|\mathbf{SP}| = |\mathbf{SP'}|$ und $|\mathbf{SP'}| = |\mathbf{SQ}| \Rightarrow |\mathbf{SP}| = |\mathbf{SQ}|$

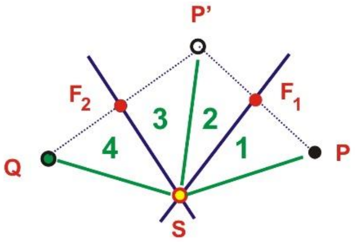
Wir haben 4 Winkel, die paarweise gleich sind.

φ_1(**SF₁P**) = φ_2(**SF₁P'**) und

φ_3(**SF₂P'**) = φ_4(**SF₂Q**)

Es gilt damit auch

$\alpha = \varphi_2(\mathbf{SF_1P'}) + \varphi_3(\mathbf{SF_2P'})$



Nun der Winkel zwischen den Geraden von **S** zu **P** und **Q**:

Dies ist die Summe der genannten Winkel φ.

In dieser Summe sind jeweils 2 Winkel gleich: $\{\varphi_1 + \varphi_2\} + \{\varphi_3 + \varphi_4\} = 2\ \{\varphi_2 + \varphi_3\}$

Da $\varphi_2 + \varphi_3 = \alpha$ ist der gesuchte Winkel $\varphi(\mathbf{SPQ}) = 2\alpha$.

Wegen der Lage der 3 Punkte auf einem Kreis ist 2α auch der Winkel für die Drehung von **P** nach **Q**.

Zweite Möglichkeit

Die Spiegelung an 1 Geraden wurde in 3. besprochen. Jetzt sind auf **P** zwei Spiegelungen anzuwenden, <Spiegelung an g_1> <Spiegelung an g_2>

Für jede Spiegelung sind die aufeinanderfolgenden Transformationsschritte

$\mathbf{T}(-b) \to \mathbf{D}(-\varphi) \to \mathbf{S}(x) \to \mathbf{D}(+\varphi) \to \mathbf{T}(+b)$

Die mittleren Matrizen können zu einer Matrix zusammengefasst werden.

Für die Operationen $\mathbf{D}(-\varphi) \to \mathbf{S}(x) \to \mathbf{D}(+\varphi)$ gilt eine Gesamtmatrix $\mathbf{C}(\varphi, x)$,

$\mathbf{C}(\varphi, x) = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$

Damit ist insgesamt anzuwenden

$\mathbf{T}(-b_1) \to \mathbf{C}(\varphi_1, x) \to \mathbf{T}(+b_1) \to \mathbf{T}(-b_2) \to \mathbf{C}(\varphi_2, x) \to \mathbf{T}(+b_2)$

In der Mitte ist noch die Zusammenfassung zu $\mathbf{T}(+b_1 - b_2)$ möglich.

{Darin spielt die Reihenfolge keine Rolle.}

Beispiel *{Rechnung nicht gerundet, Angaben hier gerundet}*

g_1: $b_1 = 0{,}5$; $\varphi_1 = 20°$; g_2: $b_2 = 2$; $\varphi_2 = 50°$; Punkt **P**(5 | 3)

Vorarbeit: $\mathbf{C}(20°, x) = \begin{pmatrix} 0{,}766 & 0{,}643 \\ 0{,}643 & -0{,}766 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C}(50°, x) = \begin{pmatrix} -0{,}174 & 0{,}985 \\ 0{,}985 & 0{,}174 \end{pmatrix}$

[1]: $\mathbf{p} + \mathbf{T}(-b_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

[2]: $\mathbf{C}(\varphi_1, x)\ [1] = \begin{pmatrix} 0{,}766 & 0{,}643 \\ 0{,}643 & -0{,}766 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}437 \\ 1{,}299 \end{pmatrix}$

[3]: $[2] + \mathbf{T}(+b_1 - b_2) = \begin{pmatrix} 5{,}437 \\ 1{,}299 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}437 \\ -0{,}201 \end{pmatrix}$

[4]: $\mathbf{C}(\varphi_2, x)\ [3] = \begin{pmatrix} -0{,}174 & 0{,}985 \\ 0{,}985 & 0{,}174 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5{,}437 \\ -0{,}201 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}142 \\ 5{,}320 \end{pmatrix}$

[5]: $[4] + \mathbf{T}(b_2) = \begin{pmatrix} -1{,}142 \\ 5{,}320 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1{,}142} \\ \mathbf{7{,}320} \end{pmatrix}$

Beim Vergleich, dass dieser Punkt auch durch eine Drehung um 2 φ erreicht wird, müssen wir genau lesen! Die Drehung muss <u>um</u> den Schnittpunkt der Geraden erfolgen!

Für die Berechnung des Spiegelpunkts **Q** haben wir nur $\mathbf{b_i}$ und φ_i benötigt, jetzt benötigen wir formal die Geradengleichungen. Die vorhandenen Angaben sind aber ausreichend.

$x_S = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}$ und $y_S = m_1\ x_S + b_1$ {zur Kontrolle evtl. auch y_S aus den Werten für g_2}

Mit $m_i = \tan(\varphi_i)$: $x_S = 1{,}5 / -0{,}828 = -1{,}812$; $y_S = -0{,}160$

Sei **s** der Vektor des Schnittpunkts, $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -1{,}812 \\ -0{,}160 \end{pmatrix}$

Für die Drehung von **P** gilt dann: **q** = **T**(-**s**) → **D**(2φ) → **T**(+**s**) angewandt auf **p**.

{Winkel zwischen den Geraden: $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 30°$}

[1] **p** + **t**(-**s**) = $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1{,}812\\0{,}160\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6{,}812\\3{,}160\end{pmatrix}$

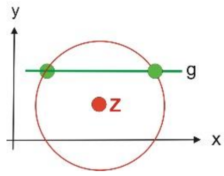
[2] **D**(2φ) [1] = $\begin{pmatrix}\cos(60°) & -\sin(60°)\\ \sin(60°) & \cos(60°)\end{pmatrix}$ [1] = $\begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}866\\ 0{,}866 & 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6{,}812\\3{,}160\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}670\\7{,}479\end{pmatrix}$

[3] **q** = [2] + **t**(+**s**) = $\begin{pmatrix}0{,}670\\7{,}479\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1{,}812\\-0{,}160\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{-1{,}142}\\ \mathbf{7{,}320}\end{pmatrix}$ ☑

Verifiziert: Derselbe Punkt wird erreicht durch eine Spiegelung an 2 Geraden und eine Drehung mit dem doppelten Schnittwinkel um den Schnittpunkt der Geraden.

5. Wenig Rechnung - Nur Überlegungen

Kreis um **Z**(2 | 3) mit Radius r = 5.
Eine Gerade geht durch den Punkt **P**(1 | 7) und ist parallel zur x-Achse.
Gesucht sind die beiden Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis.

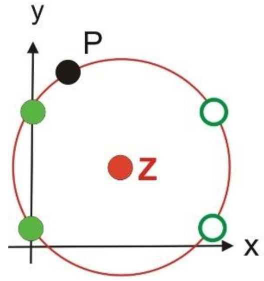


{Die Skizze enthält keine Information zur genauen Lage der Punkte!}

Parallele zur x-Achse, daher g: y = 7
P liegt auf dem Kreis, daher $x^2 + y^2 = r^2$
P liegt oberhalb von **Z**, relativ zu **Z** ist die y-Koordinate von **P**: 7 - 3 = 4
Damit, für den Kreis um **Z**: $x^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow x = 3 \rightarrow$ 1. Punkt **P**(3 | 4)
Im Original-Koordinatensystem damit: 1. Punkt **P**(5 | 7)
Die x-Koordinate liegt rechts von der x-Koordinate von **Z**, der zweite Punkt muss also links davon liegen. Bezogen auf **Z** ist Δx = 3. Damit für den 2. Punkt: x-Koordinate = 2 - 3.
Der 2. Punkt ist **P'**(-1 | 7)

6. Drehung am Kreis (etwas Rechenarbeit)

Kreis um **Z**(3 | 2).
Auf dem Kreis liegt der Punkt **P**(0,5 | 4).
Um welche Winkel muss **P** (um **Z**) gedreht werden, damit die Schnittpunkte mit der y-Achse entstehen?
Welche Koordinaten haben die beiden Schnittpunkte ($\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$) und welche Koordinaten die Punkte, die daraus durch Spiegelung an einer Parallelen zur y-Achse durch **Z** entstehen ($\mathbf{S_1'}$, $\mathbf{S_2'}$)?



{Die Skizze enthält keine Information zur Lage der Punkte bezüglich der x-Achse!}

Zur Berechnung einer Rotation um **Z** muss der Drehpunkt berücksichtigt werden.

p' = $\begin{pmatrix}0{,}5-3\\4-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2{,}5\\2\end{pmatrix}$

Abkürzende Schreibweise: C = cos(α), S = sin(α)

Drehung von **P'**: $\begin{pmatrix}C & -S\\ S & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2{,}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2{,}5\,C - 2\,S\\ -2{,}5\,S + 2\,C\end{pmatrix}$

Rücktransformation in das Original-Koordinatensystem: $\begin{pmatrix}-2{,}5\,C - 2\,S + 3\\ -2{,}5\,S + 2\,C + 2\end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit der y-Achse: x = 0

$-2{,}5\ C - 2\ S + 3 = 0$; Lösung mit $S = (1 - C^2)^{1/2}$

$(1 - C^2)^{1/2} = -3/2 + 5/4\ C \rightarrow 1 - C^2 = 9/4 - 15/4\ C + 25/16\ C^2 \rightarrow 41/16\ C^2 + 15/4\ C + 5/4$

{Im Folgenden jeweils ungerundet gerechnet, gerundet angegeben.}

$C^2 - 60/41\ C + 20/41 = 0 \rightarrow C_{1;2} = 0{,}950; 0{,}514 \rightarrow \alpha = 18{,}23°; 59{,}10°$

Berechnung der Koordinaten:

$C = 0{,}950$; $S = 0{,}313$; $x = -2{,}5\ C - 2\ S + 3 = 0$; $y = -2{,}5\ S + 2\ C + 2 = 3{,}118$

$C = 0{,}514$; $S = 0{,}858$; $x = -2{,}5\ C - 2\ S + 3 = 0$; $y = -2{,}5\ S + 2\ C + 2 = 0{,}882$

{Die Berechnung der x-Koordinate ist nur eine Rechenkontrolle, x = 0 ist die bekannte Voraussetzung.}

Schnittpunkte $\mathbf{S_1}$(0 | 3,118), $\mathbf{S_2}$(0 | 0,882)

Bei der Spiegelung an einer Parallelen zur y-Achse durch **Z** ändern sich nur die x-Koordinaten; Abstand nach links von **Z** = Abstand nach rechts von **Z**.

{von **Z** aus gesehen, ist **S'** symmetrisch zu **S** bezüglich x = 3}

Spiegelpunkte $\mathbf{S_1}$'(6 | 3,118), $\mathbf{S_2}$'(6, 0,882)

7. Mehrfache Spiegelung (Mathematische Spielerei)

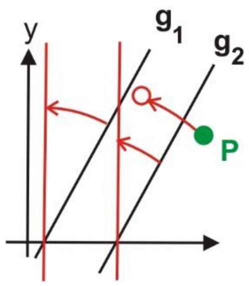
Bekannt ist folgende Aussage:" Eine Nacheinander-Spiegelung an 2 parallelen Geraden $g_{1,2}$ ist gleich einer Verschiebung auf einer Geraden, senkrecht zu den Geraden $g_{1,2}$. Die Verschiebungsdistanz ist das Doppelte des Abstands der Geraden."

♦ Trivial ist, dass für den "Abstand der Geraden" ein Lot auf die Geraden benutzt wird.

♦ Nicht präzise definiert ist die Reihenfolge der Spiegelungen. Am Beispiel wird jedoch klar, dass die Reihenfolge beachtet werden muss ("nicht kommutativ"). Wenn man im Abstand "$g_2 - g_1$" rechnet, also der Abstand mit Vorzeichen benutzt wird, folgt auch jeweils die richtige Verschiebung (ebenfalls mit Vorzeichen).

♦ Wir überlegen zusätzlich, ob für die weitere Rechnung nicht eine Vereinfachung möglich ist.

Eine Rechnung mit geneigten Geraden ist umständlich. Für unsere Fragestellung ist sie auch unnötig. Nach Drehung der gesamten Anordnung (Geraden und Punkt) sind die Spiegelachsen g_1 und g_2 parallel zur y-Achse und der Abstand der Spiegelachsen ist durch deren Lage auf der x-Achse bestimmt.

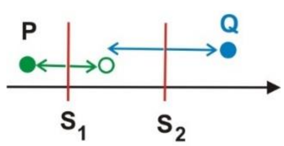


Wir wollen nicht bestimmen, wo der Punkt nach der Spiegelung im übergeordneten Koordinatensystem liegt, sondern nur, wo er senkrecht zu den Spiegelachsen liegt.

Damit ist die Fragestellung in eine einfache Beziehung auf einer Zahlengeraden umgeformt.

Auf der Zahlengeraden können wir schnell die Aussage bestätigen und sehen auch, dass die Reihenfolge der Spiegelungen wichtig ist.

$\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$ seien die beiden Spiegelachsen, aus **P** entsteht über einen Zwischenpunkt nach der 2. Spiegelung **Q**.



P: 1 / $\mathbf{S_1}$: 3 / Zwischenpunkt: 5

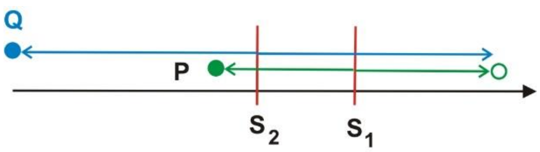
$\mathbf{S_2}$: 8 / **Q**: 11

Abstand zwischen $\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$: d = 8 - 3 = 5

Abstand $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ = 10 = 2d.

Gegenbeispiel:

(Reihenfolge **S** vertauscht)



P: 1 / $\mathbf{S_1}$: 8 / Zwischenpunkt: 15

$\mathbf{S_2}$: 3 / **Q**: -9

Abstand zwischen $\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$: d = 3 - 8 = -5

Abstand $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ = -10 = 2d.

Eine Erweiterung ist die Frage, welche Situation nach mehreren solcher Parallelspiegelungen entsteht. Nach einigen Umformungen folgt eine Summe über einzelne Spiegelpositionen.

{Bei einer Herleitung ("Übung") sollten die Fälle n gerade / ungerade zuerst getrennt berechnet werden.}

Wenn n Spiegel mit den jeweiligen Positionen $\mathbf{S_j}$ vorliegen, ist der Endpunkt:

$$\mathbf{x_Q} = (-1)^{\mathbf{n}} \{2 \, [\, \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \, \mathbf{S_j} \,] + \mathbf{x_P} \,\}$$

{Damit lässt sich auch der jeweils nach n Schritten erreichte Zwischenpunkt errechnen.}

{Für 2 Spiegelungen mit den Positionen $\mathbf{S_1}$ = a und $\mathbf{S_2}$ = b folgt daraus nach 2 Spiegelungen:

$x_Q = (-1)^2 \{2 [(-1) a + (-1)^2 b] + x_P = 2 (b - a) + x_P$

Also (mit richtiger Reihenfolge) doppelter Spiegelabstand für die Punkte.}

Allgemein - Spiegelachsen nicht achsenparallel

Unsere Formel setzt Spiegelachsen parallel zur y-Achse und die Kenntnis der Werte $\mathbf{S_j}$ voraus. Für unsere Angaben (**P** und Gerade g) ist eine direkte Vektorrechnung einfacher.

{Eine Berechnung über $\mathbf{S_j}$ wäre ein Umweg mit einigen Rotationen.}

Beispiel:

Sei **P**(5 | 3) und g_1: y = 2 x -3. Gesucht ist der Spiegelpunkt **Q**.

{Lotfußpunktverfahren; *Anmerkung* :Die alternative Berechnungsmethode durch Drehung der Geraden in eine Achsenrichtung und dort Spiegelung wurde in Übung 3 für 1 Spiegelung schon erläutert.}

Zwei Punkte auf g_1: **A**(0 | -3) und **B**(3/2 | 0)

Richtungsvektor $\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathbf{BA}} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}$; g_1: $\mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{u} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Spiegelung geschieht senkrecht zur Geraden.

Normale auf g_1: $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ {Koordinatenvertauschung und Vorzeichenwechsel}

Schnittpunkt **S** (g_1 / Normalen (g_2) mit dem Aufpunkt **P**).

Damit: $\lambda \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

{2 Gleichungen mit 2 Unbekannten: $3/2\, \lambda = -3\, \mu + 5 \wedge 3\, \lambda - 3 = 3/2\, \mu + 3$}

Lösung: $\lambda = 34/15$; $\mu = 8/15$

Einsetzen {z.B. λ zur Berechnung von **S**, μ als Kontrolle der Rechnung}

S: $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 17/5 \\ 19/5 \end{pmatrix}$; Abstand $\overrightarrow{\mathbf{SP}}$: $\mathbf{d} = \mathbf{p} - \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$

Endpunkt **Q** nach einer Spiegelung: $\mathbf{q} = \mathbf{s} + (-\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} \mathbf{9/5} \\ \mathbf{23/5} \end{pmatrix}$ {Hinzufügen in Gegenrichtung}

Zusatzfrage: Es folgt eine zweite Spiegelung an der parallelen Geraden g_3: y = 2 x +2.

Wo liegt der 2. Endpunkt **Q'**? Wird die Aussage "äquivalent mit Verschiebung mit doppeltem Geradenabstand" bestätigt?

Wieder Gerade in der Vektordarstellung.

{**u** und **n** sind für parallele Geraden gleich, bzw. beliebige Vielfache. Wegen der nicht eindeutigen Parameter-Darstellung einer Geraden beschreiben $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\, \mathbf{u}$ und $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t'\, (\lambda\, \mathbf{u})$ dieselbe Gerade!}.

g_3: **A'** (0 | 2), **B'**(1 | 4); $\mathbf{u'} = \overrightarrow{\mathbf{A'B'}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; g_3: $\mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{u'} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\lambda = 7/5$; $\mu = -9/5$; $\mathbf{s'} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 24/5 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{d'} = \mathbf{q} - \mathbf{s'} = \begin{pmatrix} (9-7)/5 \\ (23-24)/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$ {Der Endpunkt der 1. Spiegelung wird gespiegelt.}

Endpunkt **Q'**: $\mathbf{q'} = \mathbf{s'} + (-\mathbf{d'}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}$

Abstandsvergleich: Geraden: $|\, \mathbf{s} - \mathbf{s'} \,| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}$

Punkte: $|\, \mathbf{q'} - \mathbf{p} \,| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 2\sqrt{5}$ { = doppelter Wert }