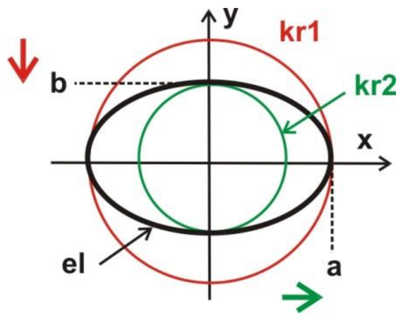
Kegelschnitte - Teil 4

4. Details: Ellipse

4.1 Kreis → Ellipse

In der "Normallage" ist der Mittelpunkt in einem (kartesischen) Achsensystem **M**(0 | 0).
Dann gilt: el: $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$
Die große Halbachse (a) zeigt in Richtung x-Achse.
Eine Ellipse entsteht durch eine axiale Streckung aus einem Kreis.
Dies ist eine "affine Abbildung" (geradentreu - Geraden auf Geraden abgebildet; umkehrbar - genau 1 Punkt als Bildpunkt zu 1 Punkt des Urbilds; parallelentreu - Parallelen auf Parallelen abgebildet; im Allgemeinen nicht winkeltreu)



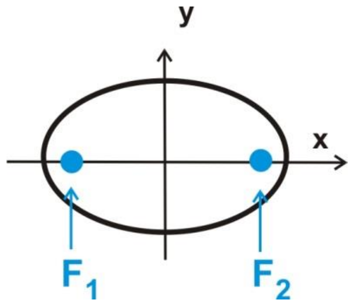
Der Umkreis kr1 mit dem Radius a wird so gestaucht, dass y bei x = 0 den Wert b besitzt.
Es gilt damit $x = x_k$ und $y = (b/a)\, y_k$.
Die Alternative ist eine Streckung des Inkreises kr2 mit dem Radius b so, dass x bei y = 0 den Wert a besitzt.
Damit $x = (a/b)\, x_k$ und $y = y_k$

Beides führt von der Kreisgleichung zur **Ellipsengleichung**.
Umkreis: k: $x_k^2 + y_k^2 = a^2 \rightarrow y_k = (a/b)\, y \rightarrow x^2 + (a^2 / b^2)\, y^2 = a^2 \quad \rightarrow x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$
Inkreis: k: $x_k^2 + y_k^2 = b^2 \rightarrow x_k = (b/a)\, x \rightarrow (b^2 / a^2)\, x^2 + y^2 = b^2 \quad \rightarrow x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$

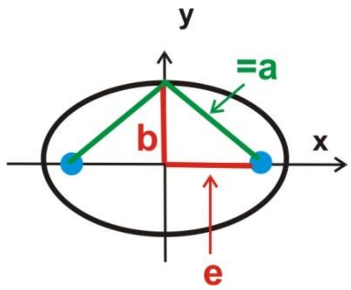
Die Schnittpunkte mit den Achsen sind die **Scheitel**.
Auf der x-Achse die Hauptscheitel bei x = ± a.
Auf der y-Achse die Nebenscheitel bei y = ± b.

HINWEIS: Eine Gleichung, die die Gemeinsamkeit der Kegelschnitte zeigt, wird in Kapitel 3 schon genannt worden und wird nochmals in Kapitel 7 besprochen. genannt. In Kapitel 8 - 10 werden die Verschiebung und Drehung der Ellipse behandelt.

4.2 Brennpunkte

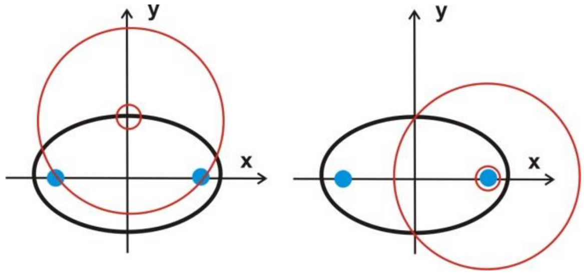


Symmetrisch zum Mittelpunkt auf der x-Achse liegen zwei **Brennpunkte F**.
$\mathbf{F_1}(-e \mid 0)$, $\mathbf{F_2}(+e \mid 0)$.
e wird so gewählt, dass damit Eigenschaften entstehen, die mit der Bezeichnung "Brennpunkt" angedeutet sind. e wird auch "lineare Exzentrizität" oder "Brennweite" genannt.



Der Abstand von **F** zu einem Nebenscheitel ist gleich a.
Eine Skizze zeigt dann, dass $b^2 + e^2 = a^2$
$\rightarrow e = \sqrt{a^2 - b^2}$.
(Das Vorzeichen ± ist schon in der vorigen Definition $\mathbf{F_{1,2}}$ berücksichtigt.)
Die Skizze zeigt auch, dass die Summe der Abstände des Nebenscheitels von den beiden Brennpunkten $\mathbf{F_{1,2}}$ gleich 2a ist.

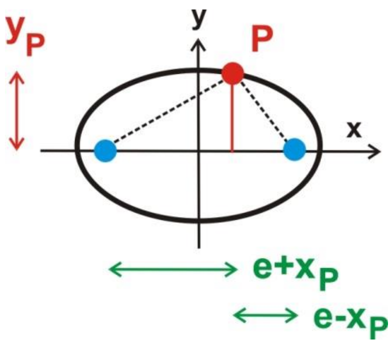
Die Brennpunkte sind auch
a) Schnittpunkte eines Kreises mit r = a (wie der Umkreis) um einen Nebenscheitel mit der x-Achse,
b) Mittelpunkte eines Kreises mit r = a, der die beiden Nebenscheitel schneidet.



4.3 Brennpunkt-Eigenschaft 1

Für jeden Punkt auf der Ellipse gilt, dass die Summe der Abstände von den beiden Brennpunkten 2a ist.

a) *geometrische Überlegung*



Punkt $P(x_P \mid y_P)$; $\mathbf{F_1}(-e \mid 0)$; $\mathbf{F_2}(+e \mid 0)$
Strecken auf der x-Achse: $s_1 = e + x_P$; $s_2 = e - x_P$
Strecken $d_1 = \overline{\mathbf{PF_1}}$; $d_2 = \overline{\mathbf{PF_2}}$
Pythagoras: $d_1^2 = s_1^2 + y_P^2$; $d_2^2 = s_2^2 + y_P^2$

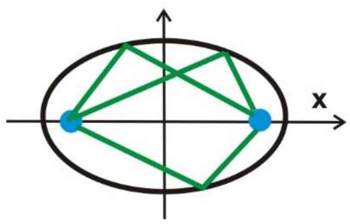
y_P eliminieren mit Ellipsengleichung: $y_P^2 = b^2 - x_P^2\, b^2 / a^2$
b eliminieren: $y_P^2 = a^2 - e^2 - x_P^2\,(a^2 - e^2) / a^2 = a^2 - e^2 - x_P^2 + x_P^2\, e^2 / a^2$
$s_1^2 = e^2 + 2\,e\,x_P + x_P^2 \rightarrow d_1^2 = a^2 + 2\,e\,x_P + x_P^2\, e^2 / a^2 = (a + x_P\, e / a)^2$
analog (bei d_2^2 "-" bei $2\,e\,x_P$) $d_2^2 = (a - x_P\, e / a)^2$
gesamt: $d_1 + d_2 = 2\,a$ ☑

b) *nur rechnerisch*

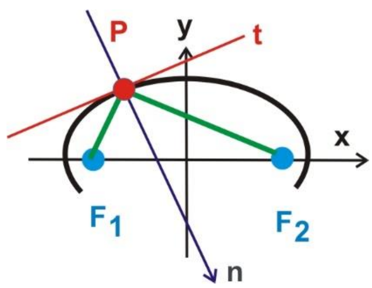
$d_1 = \overline{\mathbf{PF_1}}$; $d_2 = \overline{\mathbf{PF_2}}$; $d_1^2 = (x_P - (-e))^2 + (y_P - 0)^2$; $d_2^2 = (x_P - e)^2 + y_P^2$
Um zu vermeiden, dass wir in "$d_1 + d_2$" mit Wurzeln arbeiten müssen, bleibt als sinnvoller Weg - wie vorher - y_P und dann b zu eliminieren.
Wie vorher: $d_1^2 = x_P^2 + 2\,e\,x_P + e^2 + y_P^2 = x_P^2 + 2\,e\,x_P + e^2 + b^2 - x_P^2\, b^2 / a^2$
und: $x_P^2 + 2\,e\,x_P + e^2 + (a^2 - e^2) - x_P^2\,(a^2 - e^2) / a^2 = a^2 + 2\,e\,x_P + x_P^2\, e^2 / a^2$
Es folgt (identisch zu oben) $d_1 + d_2 = 2\,a$ ☑

4.4 Brennpunkt-Eigenschaft 2

Wenn die Innenseite der Ellipse verspiegelt ist, wird jeder von einem Brennpunkt ausgehende Strahl wieder auf den anderen Brennpunkt (durch Reflexion) fokussiert.
Die Brennpunkt-Eigenschaft 1 legt das - wegen des stets gleichen Abstands - zwar nahe, aber beweist nicht, dass dies auch für eine Reflexion gilt.



Herleitungen:



- ♦ (1) Der von $\mathbf{F_1}$ auf $\mathbf{P}$ einfallende Vektor $\mathbf{e}$ wird in einen Vektor $\mathbf{r}$ reflektiert, in Richtung $\overrightarrow{\mathbf{PF_2}}$
- ♦ (2) $\overrightarrow{\mathbf{PF_1}}$ und $\overrightarrow{\mathbf{PF_2}}$ haben gleiche Winkel relativ zu $\mathbf{n}$ ($\perp$ Tangente in $\mathbf{P}$)
- ♦ (3) Die Summe der Einheitsvektoren von $\overrightarrow{\mathbf{PF_1}}$ und $\overrightarrow{\mathbf{PF_2}}$ ist kollinear zu $\mathbf{n}$.

Die allgemeine Durchrechnung ist bei (1) und (2) etwas umständlich. Daher wird dafür jeweils ein Zahlenbeispiel angegeben. $a = 5$; $b = 3$; $\mathbf{P}(5/2 \mid 3\sqrt{3}/2)$; $e = 4$.
{Dabei ist automatisch auch die Einschränkung $-a \le x \le a$ erfüllt.}

♦ **(1)** $\mathbf{F_1}(-e \mid 0)$; $\mathbf{F_2}(e \mid 0)$; $\mathbf{P}(x_o \mid y_o)$; Tangente: $x\, x_o / a^2 + y\, y_o / b^2 = 1$ {zur Formel: 4.5!}

$\mathbf{e} = \overrightarrow{\mathbf{F_1P}} = \begin{pmatrix} x_o + e \\ y_o \end{pmatrix}$; $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x_o/a^2 \\ y_o/b^2 \end{pmatrix}$; erwartetes $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} e - x_o \\ -y_o \end{pmatrix}$;

$\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = (x_o + e)\,(x_o / a^2) + y_o^2 / b^2$; $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = x_o^2 / a^4 + y_o^2 / b^4$

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_o + e \\ y_o \end{pmatrix} - 2\,\{\,(x_o + e)\,(x_o / a^2) + y_o^2 / b^2\,\} / \{\,x_o^2 / a^4 + y_o^2 / b^4\,\} \begin{pmatrix} x_o/a^2 \\ y_o/b^2 \end{pmatrix}$

{umständlich: dies ist kollinear zum erwarteten **r**}

Zahlenwerte:

$\mathbf{e} = \overrightarrow{\mathbf{F_1P}} = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1/10 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix}$; erwartetes $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = 7/5$; $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 7/75$; $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} - 2\,(7/5)\,(75/7) \begin{pmatrix} 1/10 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -7\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

→ Das berechnete **r** ist kollinear zum erwarteten (Faktor 3/7)

♦ **(2)** $\mathbf{v_1} = \overrightarrow{\mathbf{PF_1}} = \begin{pmatrix} -e - x_o \\ -y_o \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \overrightarrow{\mathbf{PF_2}} = \begin{pmatrix} e - x_o \\ -y_o \end{pmatrix}$; $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x_o/a^2 \\ y_o/b^2 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = x_o^2 / a^4 + y_o^2 / b^4$; $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_1} = e^2 + 2\,e\,x_o + x_o^2 + y_o^2$; $\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_2} = e^2 - 2\,e\,x_o + x_o^2 + y_o^2$;

$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{n} = \{-e - x_o\}\, x_o / a^2 - y_o^2 / b^2$; $\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{n} = \{e - x_o\}\, x_o / a^2 - y_o^2 / b^2$;

$\cos(\varphi_1)\,|\,\mathbf{n}\,| = \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{n} / |\,\mathbf{v_1}|$; $\cos(\varphi_2)\,|\,\mathbf{n}\,| = \mathbf{v_2} \cdot \mathbf{n} / |\,\mathbf{v_2}\,|$;

{allgemein ist die Gleichheit zweier Ausdrücke umständlich zu zeigen.}

Zahlenwerte:

Term1: $\{(-e - x_o)\, x_o / a^2 - y_o^2/b^2\} / \{(-e - x_o)^2 + y_o^2\}^{1/2} =$
$\{(-13/2)\,(5/2) / 25 - (27/4) / 9\} / \{169/4 + 27/4\}^{1/2} = -1/5$

Term2: $\{(e - x_o)\, x_o / a^2 - y_o^2/b^2\} / \{(e - x_o)^2 + y_o^2\}^{1/2} =$
$\{(3/2)\,(5/2) / 25 - (27/4) / 9\} / \{9/4 + 27/4\}^{1/2} = -1/5$

→ Die Winkel sind gleich.

♦ **(3)** $\mathbf{v_1} = \overrightarrow{\mathbf{PF_1}} = \begin{pmatrix} -e - x_o \\ -y_o \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \overrightarrow{\mathbf{PF_2}} = \begin{pmatrix} e - x_o \\ -y_o \end{pmatrix}$; $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x_o/a^2 \\ y_o/b^2 \end{pmatrix}$;

Für den Betrag wurde oben hergeleitet: $|\,\mathbf{v_1}\,| = a + x_o\, e / a$; $|\,\mathbf{v_2}\,| = a - x_o\, e / a$

Summe $\mathbf{v_{SUM}} = \mathbf{v_1} / |\,\mathbf{v_1}\,| + \mathbf{v_2} / |\,\mathbf{v_2}\,|$

x-Koordinate: $(-e - x_o) / (a + x_o\, e / a) + (e - x_o) / (a - x_o\, e / a)$

y-Koordinate: $-\, y_o / (a + x_o\, e / a) - y_o / (a - x_o\, e / a)$

zusammengefasst

x-Koordinate: $2\, a\, x_o\, (a^2 - e^2) / (a^4 - e^2\, x_o^2)$

y-Koordinate: $-\, 2\, a^3\, y_o / (a^4 - e^2\, x_o^2)$

Kollinear zu **n**?

y-Koordinate: $= \lambda\, \mathbf{n}_{(y)} = \lambda\, y_o / b^2$ mit $\lambda = 2\, a^3\, b^2 / (a^4 - e^2\, x_o^2)$

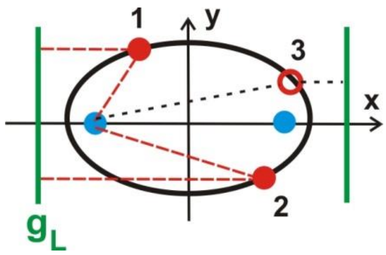
x-Koordinate: $= \mu\, \mathbf{n}_{(x)} = \mu\, x_o / a^2$ mit $\mu = 2\, a^3\, (a^2 - e^2) / (a^4 - e^2\, x_o^2)$

Mit $e^2 = a^2 - b^2$ ist $\lambda = \mu$. Damit besteht für den Vektor lineare Abhängigkeit.

→ *Die Summe der Einheitsvektoren $\mathbf{v_{SUM}}$ ist kollinear zu $\mathbf{n}$, $\mathbf{v_{SUM}} = \lambda\, \mathbf{n}$.*

4.5 Leitlinien

Es gibt auch zwei **Leitlinien**, parallel zur kleinen Halbachse (b). g_L: x = ± d; d = a^2 / e erfüllt dann die Eigenschaft, dass der Quotient "Abstand eines Ellipsenpunkts vom Brennpunkt / Abstand von der Leitlinie" konstant ist. Nach der Skizze ist zu erwarten, dass dies jeweils nur für Brennpunkt und benachbarte Leitlinie, also F_1 und g_{L1} (bzw. F_2 und g_{L2}) gilt. (Punkt 1, 2 und nicht für Punkt 3)



Vergleich: Bei der Parabel ist dieser Quotient stets 1 - also gleiche Abstände. Bei der Ellipse ist der Abstand von der Leitlinie stets größer - aber auch mit konstantem Verhältnis.

Überlegung zur Leitlinien-Eigenschaft

Als Abstand der Leitlinie wählen wir zuerst als Zwischenwert den Abstand vom Scheitel z, und wir wählen zuerst Punkte, für die die Abstände leicht anzugeben sind.

P_1(-a | 0) - also linker Scheitel.

Dann ist Abstand $\overline{PF_1}$ a -e.

Die Leitlinie links hat einen Abstand z von P_1 $\overline{PL_1}$ = z.

Der Quotient ist ε = $\overline{PF_1}$ / $\overline{PL_1}$ = (a - e) / z.

P_2(0 | b) - also oberer Scheitel.

Dafür ist nach dem Dreieck F_1-M-P_2 $e^2 + b^2 = r^2$ mit r = $\overline{PF_1}$.

Die Leitlinie hat den Abstand $\overline{PL_1}$ = a + z.

b wird eliminiert mit $e^2 = a^2 - b^2$. Damit $\overline{PF_1} = \sqrt{a^2 - b^2 + b^2} = a$

Der Quotient ist ε' = $\overline{PF_1}$ / $\overline{PL_1}$ = a / (a +z).

Für die Ellipse gilt nun als Forderung, dass der Quotient stets konstant ist.

Alternativ könnte man sagen, "wir suchen, ob eine solche Annahme dann auch die Verhältnisse für alle Punkte der Ellipse sinnvoll beschreibt".

Gleichsetzen ε = ε' und Auflösen führt zu z = (a^2 - e a) / e.

Sinnvoller ist, für die Leitlinie auch eine Angabe im Koordinatensystem der Ellipse, also relativ zu M(0 | 0). Für die x-Koordinate ist dann d = z + a.

Dann gilt (kurze Umformung): d = a^2 / e bzw. g_L: x = a^2 / e und ε = e / a.

Der nächste Schritt, die Überprüfung ob das für alle Punkte gilt, ist in allgemeiner Form ähnlich wie in 4.3 möglich. (Siehe auch 7.4) Hier kürzer eine Rechnung mit Zahlenwerten für a und b.

Sei a = 5, b = 3. → e = 4.

P(x | y); y = (3/5) $\sqrt{25 - x^2}$

F_1(-4 | 0); g_{L1}: x = -25/4

{ $\overline{PF_1}$ }^{2} = $(-4 - x)^2$ + (9/25) (25 - x^2) = (16/25) x^2 + 8x + 25 → $\overline{PF_1}$ = (4/5) x + 5

{ $\overline{PL_1}$ }^{2} = $(- 25/4 - x)^2$ {gleiches y} → $\overline{PL_1}$ = x + 25/4 {Abstand als Betrag}

Quotient ε = $\overline{PF_1}$ / $\overline{PL_1}$ = (4/5) (x + 25/4) / (x + 25/4) = 4/5 ≡ e/a ☑

ε ist konstant für alle Punkte. Dabei wurde die zu einem Brennpunkt benachbarte Leitlinie (gleiche linke Halbebene der Skizze) eingesetzt.

F_2(+4 | 0) und g_{L2}: x = +25/4 - also beides auf der rechten Halbebene:

{ $\overline{PF_2}$ }^{2} = $(4 - x)^2$ + (9/25) (25 - x^2) = (16/25) x^2 - 8x + 25 → $\overline{PF_1}$ = (4/5) x - 5

{ $\overline{PL_2}$ }^{2} = $(25/4 - x)^2$ → $\overline{PL_1}$ = x - 25/4 {Abstand als Betrag}

Quotient ε = $\overline{PF_2}$ / $\overline{PL_2}$ = (4/5) (x - 25/4) / (x - 25/4) = 4/5 ≡ e/a ☑

Wenn "gemischt" zugeordnet wird ist e nicht mehr konstant,

z.B. = $\overline{PF_1}$ und $\overline{PL_2}$ e = (4/5) (4 x + 25) / (4x - 25)!

Die genannte Forderung "Brennpunkt und benachbarte Leitlinie" muss beachtet werden.

Wenn die Forderung eingehalten wird, gilt die Konstanz für ε aber für alle Punkte der Ellipse!

4.6 Tangente am Berührpunkt

Hinweis: Hier steht x_o (und y_o) für die Koordinaten eines Punkts auf der Ellipse. Nach Einführung des Pols wird unterschieden werden - $x_{1,2}$ für Berührpunkte und x_o für den Pol.
{Hier: Einziger Grund ist das "schönere Aussehen" - "0" statt "1,2" oder "i"}

Für eine **Tangente** am Punkt $P(x_o \mid y_o)$ gilt **t: $x\, x_o / a^2 + y\, y_o / b^2 = 1$**.
Alternativ ohne Brüche: **t: $b^2\, x\, x_o + a^2\, y\, y_o = a^2\, b^2$**.
$(x \mid y)$ ist dabei der allgemeine Punkt auf dieser Geraden.
{x^2 bzw. y^2 aus der Ellipsengleichung sind in zwei Teile $x\, x_o$ bzw. $y\, y_o$ aufgespalten, daher ist auch der Name "Spaltform" üblich.}

♦ Vorarbeit Kreis:
Für einen Ursprungskreis ist die Tangente t: $x_o\, x + y_o\, y = r^2$
Mögliche Herleitung
a) Vektorgeometrie
$\overrightarrow{\mathbf{MP}} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} \to \mathbf{u}(g_T) = \begin{pmatrix} -y_o \\ x_o \end{pmatrix} \to g_T\!: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -y_o \\ x_o \end{pmatrix}$
$-\lambda = (x - x_o) / y_o;\ +\lambda = (y - y_o) / x_o$
$\to$ (quadriert, summiert) $x^2 + y^2 = x_o^2\, (1 + \lambda^2) + y_o^2 (1 + \lambda^2)$
$\to$ (λ geeignet eingesetzt) $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2\, (x_o^2 + y_o^2) - (2\, x\, x_o + y\, y_o)$
$\to$ ($x^2 + y^2 = x_0^2 + y_o^2 = r^2$ eingesetzt und gekürzt) t: $x_o\, x + y_o\, y = r^2$
b) Analysis (g_T: $y = m\, x + c$)
kr: $y^2 = r^2 - x^2 \to d/dx(y^2) = 2y\, dy/dx = - 2x$
an $P(x_o \mid y_o)$: $dy/dx = - x_o / y_o = m$
t: $y_o = m\, x_o + c \to c = y_o + x_o^2 / y_o \to y = - (x_o / y_o)\, x + y_o + x_o^2 / y_o$
$(\cdot y_o)$: $y\, y_o = - x_o\, x + y_o^2 + x_o^2 = - x_o\, x + r^2 \to x_o\, x + y_o\, y = r^2$

♦ Nun die Ellipse:
a) Tangente am Umkreis und axiale Stauchung {dazu diente die "Vorarbeit"}
Tangente am Umkreis kr: $x_o\, x_k + y_o\, y_k = a^2$.
Stauchung $x = x_k$ und $y = (b/a)\, y_k$.
el: $x_o\, x + (a/b)\, y_o\, (a/b)\, y = a^2 \to x\, x_o / a^2 + y\, y_o / b^2 = 1$
b) Formale Übung ist die Herleitung über Analysis
allgemeine Geradengleichung g_T: $y = m\, x + c$
el: $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$; $y^2 = b^2 - x^2\, b^2 / a^2$; $d/dx(y^2) = 2y\, dy/dx = - 2x\, b^2 / a^2$
an $P(x_o \mid y_o)$: $dy/dx = - (x_o / y_o)\, (b^2 / a^2) = m$
t: $y_o = m\, x_o + c \to c = y_o + (x_o^2 / y_o)\, (b^2 / a^2)$
$\to y = - (x_o / y_o)\, x\, (b^2 / a^2) + y_o + (x_o^2 / y_o)\, (b^2 / a^2)$
multipliziert mit $(y_o / b^2) \to g_T$: $y\, y_o / b^2 = - x_o\, x / a^2 + y_o^2 / b^2 + x_o^2 / a^2$
umgeordnet $\to y\, y_o / b^2 + x_o\, x / a^2 = 1$
{Für den Berührpunkt $\mathbf{P}(x_o \mid y_o)$ gilt (natürlich) die Ellipsengleichung: $x_o^2 / a^2 + y_o^2 / b^2 = 1$.}

4.7 Berührbedingung für eine Gerade "y = m x + c"

Eine Gerade kann eine Ellipse schneiden (2 Punkte), tangential berühren (1 Punkt) oder vorbeilaufen. Ein Berührpunkt liegt vor, falls **$a^2\, m^2 + b^2 = c^2$**. (Ellipse in der Normallage!)
Schnitt von el: $b^2\, x^2 + a^2\, y^2 = a^2 b^2$ mit g: $y = m\, x + c$.
$b^2\, x^2 + a^2\, \{m^2\, x^2 + c^2 + 2\, m\, x\, c\} = a^2\, b^2$
geordnet: $x^2\, \{a^2\, m^2 + b^2\} + x\, \{2\, a^2\, m\, c\} + \{a^2\, c^2 - a^2\, b^2\} = 0$
Einschub: Für $a\, x^2 + b\, x + c = 0$ entscheidet die Diskriminante $\Delta = 4\, a\, c - b^2$ über die Lösungsmenge. 2 reelle Lösungen für $\Delta > 0$, 1 reelle (Doppellösung für $\Delta = 0$), keine reellen Lösungen für $\Delta < 0$.
$\Delta = 4\, a^4\, m^2\, c^2 + 4\, a^2\, b^2\, c^2 - 4\, a^4\, m^2\, b^2 - 4\, a^2\, b^4 - 4\, a^4\, m^2\, c^2 = 0$
$\to c^2 - a^2\, m^2 - b^2 = 0$

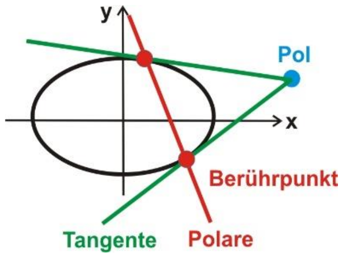
4.8 Tangenten und Berührpunkte von einem Pol aus

Ein "logisch einfacher" Weg ist in der manuellen Durchführung etwas umständlich, aber möglich.

1. Die Ellipsengleichung wird nach y^2 aufgelöst, $y^2 = b^2 (1 - x^2 / a^2)$
2. Die Steigung wird berechnet. $dy/dx = (1 / 2y)\, dy^2/dx$
   $dy^2/dx = -2\, x\, b^2 / a^2 \to dy/dx = -\, (x / y)\, (b^2 / a^2)$
3. Mit y aus 1. haben wir die Steigung als Ausdruck in x.
4. Mit dieser Steigung kann eine Gerade aufgestellt werden, die durch den Pol geht.
5. Der Schnitt dieser Geraden mit der Ellipse liefert x des Berührpunkts.
   Dieser Schritt ist in der Regel manuell zu aufwendig!
   Es folgen die (richtigen) reellen Berührpunkte und weitere komplexe Punkte.
6. Mit der Geradengleichung folgt y der Berührpunkte.

Meistens benutzt wird ein **Rechenweg über die Polare**!

Die Polare ist die Gerade durch die beiden Berührpunkte der Tangenten, die durch einen Pol gehen, an die Ellipse.
Pol **Q**(x_o | y_o)
Berührpunkte **P₁**(x_1 | y_1) und **P₂**(x_2 | y_2)



(Hier ist nur der Fall wichtig, dass der Pol außerhalb der Ellipse liegt.)
Normallage: el: $b^2\, x^2 + a^2\, y^2 = a^2\, b^2$
Für eine Tangente am Berührpunkt gilt (für $\mathbf{P_i}$): t_i: $b^2\, x\, x_i + a^2\, y\, y_i = a^2\, b^2$
Laut Voraussetzung liegt auch der Pol auf dieser Geraden t_i.
$t_1 \to b^2\, x_o\, x_1 + a^2\, y_o\, y_1 = a^2\, b^2$
$t_2 \to b^2\, x_o\, x_2 + a^2\, y_o\, y_2 = a^2\, b^2$
Subtrahiert: $b^2\, x_o\, (x_1 - x_2) + a^2\, y_o\, (y_1 - y_2) = 0$
Umgestellt: $(y_1 - y_2) / (x_1 - x_2) = -\, (b^2 / a^2)\, (x_o / y_o)$

Dies ist auch die Steigung einer Geraden durch die beiden Punkte $\mathbf{P_1}$ und $\mathbf{P_2}$!
Die Geradengleichung für die Polare ist damit $(y - y_1) = -\, (b^2 / a^2)\, (x_o / y_o)\, (x - x_1)$.
x und y gilt für den allgemeinen Punkt auf dieser Geraden.

Umgestellt: $a^2\, y_o\, y - a^2\, y_o\, y_1 = -b^2\, x_o\, x + b^2\, x_o\, x_1$
Geordnet:$\to b^2\, x_o\, x + a^2\, y_o\, y = a^2\, y_o\, y_1 + b^2\, x_o\, x_1$
Die rechte Seite ist aus t_1, siehe oben, bekannt: $= a^2\, b^2$

Damit ist die **Gleichung der Polaren** zum Pol **Q**: **pol: $b^2\, x_o\, x + a^2\, y_o\, y = a^2\, b^2$**

{Nicht verwirren lassen: Für die Tangente gilt ein gleich aussehender Ausdruck. Bei der Tangente gilt x_o und y_o für einen Berührpunkt, der auf der Ellipse liegt, hier gilt x_o und y_o für den Pol, der außerhalb der Ellipse liegt. Weil x^2 und y^2 in zwei Teile aufgespalten sind - $x\, x_o$ und $y\, y_o$ - heißt diese Gleichung auch "Spaltform"}

Die Berührpunkte erhält man durch einen Schnitt der Polaren mit der Ellipse.
Z.B. pol nach y auflösen und dieses y in die Ellipsengleichung einsetzen.
Die entstehende (quadratische Gleichung) liefert x der Berührpunkte.
y wird dann durch Einsetzen von x in die Polare berechnet.
(Rechnerisch kürzer als das Einsetzen in die Ellipsengleichung.)
Die Tangenten sind Geraden durch zwei dann bekannte Punkte (Pol und Berührpunkt).

Die so entstehenden Rechnungen sind im Regelfall wesentlich kürzer als der anfangs genannte "logisch einfache" Weg.

{Anmerkung: Liegt der Pol auf der Ellipse, ist die Polare gleich der Tangente an diesem Berührunkt.}

Beispiel

Ellipse in Normallage, **$a = 3; b = 2$.**

Pol **$Q(3/\sqrt{5} \mid 2)$**

Polare pol: $9 \cdot 3/\sqrt{5} \cdot x + 9 \cdot 2 \cdot y = 36 \to (2/\sqrt{5})\, x + 3\, y = 6$

$y = 2 - 2\, x / (3\sqrt{5})$ eingesetzt in el: $4\, x^2 + 9\, y^2 = 36$

$4\, x^2 + 9\, \{4 + (4 / 9{\cdot}5)\, x^2 - (8 / 3\sqrt{5})\, x\} = 36 \to x^2 / 5 - x / \sqrt{5} = 0 \to x_1 = 0;\ x_2 = \sqrt{5}$

y-Werte dazu am einfachsten durch Einsetzen in die Polare.

$x_1 = 0 \to 3\, y_1 = 6 \to y_1 = 2$

$x_2 = \sqrt{5} \to (2/\sqrt{5})\, \sqrt{5} + 3\, y_2 = 6 \to y_2 = 4/3$

Geradengleichungen für die Tangenten jeweils aus Pol und Berührpunkt.

$y = m\, x + c$ mit $m = (y_1 - y_o) / (x_1 - x_o)$ und $c = y_1 - m\, x_1$ (analog für 2)

Tangente 1: t_1: $m = (2 - 2) / (0 - 3/\sqrt{5}) = 0;\ c = 2$

Tangente 2: t^2: $m = (4/3 - 2) / (\sqrt{5} - 3/\sqrt{5}) = -\sqrt{5}/3;\ c = 4/3 - (-\sqrt{5}/3 \cdot \sqrt{5}) = 3$

Berührpunkte: **$P_1(0 \mid 2);\ P_2(\sqrt{5} \mid 4/3)$**

Tangenten: **t_1: $y = 2$; t_2: $y = -(\sqrt{5}/3)\, x + 3$**

P_1 und t_1 sind das, was man auch ohne Rechnung sofort sieht:

Weil **Q** die gleiche y-Koordinate wie der Nebenscheitel hat, muss die Tangente eine Parallele zur x-Achse mit $y = 2$ sein und am Berührpunkt (= Nebenscheitel) muss $x_1 = 0$ sein.

4.9 Weitere Übungen - Jeweils Normallage.

Ü1 Es ist jeweils die Ellipsengleichung anzugeben (wenn dies möglich ist).
Gegeben sind

a) 2 Brennpunkte **F_1**$(-4 \mid 0)$, **F_2**$(4 \mid 0)$

b) Brennpunkt **F_1**$(-4 \mid 0)$, Punkt auf der Ellipse **P**$(0 \mid 3)$

c) 2 Punkte auf der Ellipse **P_1**$(3 \mid 12/5)$, **P_2**$(5/3 \mid 2\sqrt{2})$.

Lösung:

a) Allgemein gilt **$F_{1,2}$**$(\pm e \mid 0)$ mit $e^2 = a^2 - b^2$
Damit liefert **F_2** keine neue Information bei bekanntem **F_1**
Beliebig viele Ellipsen mit $a^2 = e^2 + b^2$ sind möglich.

b) **F_1**$(-4 \mid 0)$, **P**$(0 \mid 3)$
An der Stelle $x = 0$ liegen die Nebenscheitel **S**$(0 \mid \pm b)$. **P** ist also der obere Nebenscheitel und damit $b = 3$. Aus **F_1**$(-e \mid 0)$ $e = 4$. $a^2 = 16 + 9;\ a = 5 \to$ el: $x^2/25 + y^2/9 = 1$

c) **P_1**$(3 \mid 12/5)$, **P_2**$(5/3 \mid 2\sqrt{2})$. Für beide Punkte ist $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Ein abgekürzter Rechenweg ist nicht möglich.
Für kürzeren Schreibaufwand Umbenennung: $u = 1/a^2;\ v = 1/b^2$
Damit: $u\, x_1^2 + v\, y_1^2 = 1 \wedge u\, x_2^2 + v\, y_2^2 = 1$
{Für eine einmalige Übung ist die Lösung mit den Zahlenwerten sinnvoller.}
$9\, u + (144/25)\, v = 1 \wedge (25/9)\, u + 8\, v = 1 \to v = 1/8 - 25/72\, u \to 9\, u - 18/25 - 2\, u = 1$
$\to u = 1/25 \to a = 5 \to v = 1/9 \to b = 3 \to$ el: $x^2/25 + y^2/9 = 1$

Ü2 Gegeben Tangente und ein Berührpunkt dazu, gesucht Ellipsengleichung.
$t: y = -(3/10)\, x + (5/2)$; **P**$(3 \mid 8/5)$
{Die Gleichung für die Tangente an einem Berührpunkt ist als bekannt vorausgesetzt. }

Lösung: Tangente: $t: x\, x_P / a^2 + y\, y_P / b^2 = 1$; Geradengleichung: $y = m\, x + c$
t aufgelöst: $y = x \cdot [\, (-x_p\, b^2) / (y_P\, a^2)\,] + b^2 / y_P$
Koeffizientenvergleich: $b^2 = y_P\, c = (8/5) \cdot (5/2) = 4$
$a^2 = -(x_P\, b^2) / (y_P\, m) = -3 \cdot 4 / (-8/5 \cdot 3/10) = 25$
el: $x^2 / 25 + y^2 / 4 = 1$

Ü3 Gegeben: $g: y = -(3/2)\, x + 4$; g schneidet die Ellipse im oberen Nebenscheitel. Der zweite Schnittpunkt ist bei $x_S = 2352 / 505 \approx 4{,}66$. Gesucht: Ellipsengleichung.

Lösung: Der obere Nebenscheitel ist **S**$(0 \mid b)$. Eingesetzt in die Geradengleichung folgt sofort $b = 4$. Dass hier keine Tangente vorliegt, ist durch die Aufgabenstellung gegeben. Da die Gerade die Ellipse an einem Punkt schneidet, muss auch ein zweiter Schnittpunkt vorliegen. Gesucht ist der Schnitt Ellipse / Gerade.
y aus g eingesetzt in die Ellipsengleichung:
$b^2\, x^2 + a^2\, y^2 = a^2\, b^2 \rightarrow 16\, x^2 + a^2 \cdot (9\, x^2 / 4 + 16 - 12\, x) = 16\, a^2$.
umgeordnet: $x^2\, (16 + 9\, a^2 / 4) - 12\, x\, a^2 = 0$
Lösung $x_1 = 0$ {Der schon bekannte Wert muss auch bei der Schnittpunktberechnung noch einmal erhalten werden!}
Lösung x_2: $(16 + 9\, a^2 / 4)\, x - 12\, a^2 = 0$; gegeben ist $x_2 = 2352 / 505$.
$a^2\, [(9 \cdot 2352) / (4 \cdot 505) - 12] = a^2\, (-768 / 505) = -37632 / 505 \rightarrow a^2 = 49$
el: $x^2 / 49 + y^2 / 16 = 1$

Ü4 Gegeben: Ellipse el: $x^2 / 9 + y^2 / 5 = 1$. Die von einem Pol an die Ellipse gelegte Tangente hat die Berührpunkte **P₁**$(x_f \mid y_1)$ und **P₂**$(x_f \mid y_2)$. x_f ist ein Wert, $x_f > 0$. Der Abstand vom Pol zum nächstliegenden Brennpunkt ist 4 (Längeneinheiten). Gesucht: Koordinaten des Pols und der Berührpunkte.
{Was weiß man zur Lage des Pols? Welcher Zusammenhang gilt zwischen y_1 und y_2?}

Lösung: $\mathbf{P_1}$ und $\mathbf{P_2}$ liegen an gleicher Stelle auf der x-Achse.
Die Gerade durch diese Punkte, die Polare, ist daher eine Parallele zur y-Achse.
$\mathbf{P_1}$ und $\mathbf{P_2}$ liegen symmetrisch zur x-Achse.
{Nur dann haben beide dieselbe x-Koordinate; also auch $y_1 = -y_2$.}
Der Pol liegt daher auf der x-Achse. Wegen $x_f > 0$ ist der rechte Brennpunkt der nächstliegende Brennpunkt **F**$(+e \mid 0)$; $e^2 = a^2 - b^2 = 4$.
Für den Pol **Q**$(x_o \mid 0)$ im Abstand 4 ist also $x_o = 6$.
Polare: $b^2\, x_o\, x + a^2\, y_o\, y = a^2\, b^2 \rightarrow 5 \cdot 6\, x + 9 \cdot 0 \cdot y = 45 \rightarrow x = 3/2$. {ist x_f für Berührpunkt}
{Einsetzen von x in die Polare liefert (natürlich) keine Bedingung für y.}
Einsetzen in die Ellipsengleichung: $y^2 = 5\, [1 - (3/2)^2 / 9] = 15/4$.
Q$(6 \mid 0)$; $\mathbf{P_1}(3/2 \mid \sqrt{15}/4)$; $\mathbf{P_2}(3/2 \mid -\sqrt{15}/4)$

Ü5 Gegeben: Ellipse el: $x^2 / 8 + y^2 / 2 = 1$. Gerade: g: $y = -(1/2)\,x + 4$.
Gesucht: Tangenten, $y = m\,x + c$, die zu g parallel sind und Berührpunkte.

Lösung:

Weg 1: Steigung am Berührpunkt einsetzen in Ellipsengleichung
an $P(x_o\,|y_o)$: $dy/dx = -\,(x_o / y_o)\,(b^2 / a^2) = m$;
in Ellipsengleichung eingesetzt, umgeordnet: $x_o^2 = a^2 / [\,1 + b^2 / (a^2\,m^2)\,]$;
$y_o = -\,x_o\,b^2 / (a^2\,m)$ {oder aus Ellipsengleichung - dann aber quadratische Gleichung!}
Tangente aus bekannter Steigung und Berührpunkt.
$x_o^2 = 8 / [1 + 2 / (8 \cdot 1/4)] = 4$; $x_o = \pm 2$; $y_o = \pm 2 \cdot 2 / [8 \cdot (-1/2)] = \pm 1$;
$\rightarrow$ Tangente zu $x_o = 2$: $c = 1 - (-1/2) \cdot 2 = 2$; zu $x_o = -2$: $c = -1 - (-1/2) \cdot (-2) = -2$

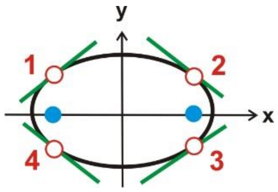
P₁$(2\,|\,1)$; t_1: $y = -(1/2)\,x + 2$; **P₂**$(-2\,|\,-1)$; t_2: $y = -(1/2)\,x - 2$

Weg 2: Anwenden der Berührbedingung $a^2\,m^2 + b^2 = c^2$
Damit sind (sofort) die Tangenten angebbar.
Berührpunkte durch Einsetzen in die Tangente oder Ellipsengleichung.
$c^2 = 8 \cdot (1/4) + 2 = 4$; $c = \pm 2$.
t_1: $y = -(1/2)\,x + 2$; t_2: $y = -(1/2)\,x - 2$.
Am Berührpunkt ($x = x_o$, $y = y_o$):
zu t_1: $x^2 / 8 + [-(1/2)\,x + 2]^2 / 2 = 1 \rightarrow x^2 - 4\,x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$
y mit Tangente: $y = -(1/2) \cdot 2 + 2 = 1$
{schlecht: Einsetzen in die Ellipsengleichung.
$y^2 = (1 - x^2 / a^2)\,b^2 = (1 - 4/8) \cdot 2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$
$y = -1$ erfüllt zwar die Ellipsengleichung, liegt aber nicht auf der Tangente!}
zu t_2: $x^2 + 4\,x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$; $y = -1$

P₁$(2\,|\,1)$; T_1: $y = -(1/2)\,x + 2$; **P₂**$(-2\,|\,-1)$; T_2: $y = -(1/2)\,x - 2$

Ü6 An eine Ellipse werden in den Punkten 1 bis 4 Tangenten gelegt. Die Punkte haben jeweils die x-Koordinaten von Brennpunkten. Die Anordnung enthält Symmetrien.

Anschaulich erwarten wir, dass die Tangenten an 1 und 3 (2; 4) parallel sind. Zum Schnittpunkt der Tangenten an 1 und 2 (3; 4) und zum Schnittpunkt der Tangenten an 2 und 3 (1; 4) haben wir ebenfalls eine anschauliche Vermutung.
Das soll rechnerisch bestätigt werden.



Lösung: $e^2 = a^2 - b^2$; Brennpunkte **F**$(\pm\,e\,|\,0)$. Zu $x = e$ ist $y^2 = b^2\,(1 - e^2 / a^2) = b^4 / a^2$.
$y = \pm\,b^2 / a$. Zuordnung der Vorzeichen laut Skizze.
$\rightarrow$ **P₁**$(-e\,|\,b^2/a)$; **P₂**$(e\,|\,b^2/a)$; **P₃**$(e\,|\,-b^2/a)$; **P₄**$(-e\,|\,-b^2/a)$.
Steigung an **P**$(x_o\,|\,y_o)$: $dy/dx = m = -\,(x_o / y_o)\,(b^2 / a^2)$.
Beispiel **P₂**$(e\,|\,b^2/a)$: $m = -\,(e\,a / b^2)\,(b^2 / a^2) = -\,e/a$.
Tangente ($y = m\,x + c$) an **P₂**: $c = b^2/a - (-e/a) \cdot (e) = (b^2 + e^2) / a = a$.
Analog für die anderen drei Tangenten.
$\rightarrow$ t_1: $y = (e/a)\,x + a$; t_2: $y = -\,(e/a)\,x + a$; t_3: $y = (e/a)\,x - a$; t_4: $y = -\,(e/a)\,x - a$.
t_1 und t_3 (T_2 und T_4) sind parallel. ☑
Schnitt t_1 / t_2: $x_S\,(m_1 - m_2) = (c_2 - c_1) \rightarrow x_S = [a - a]\,... = 0$. Wie erwartet, liegt der Schnittpunkt auf der y-Achse. ☑ $y_S = a$ {T_3 / T_4: $y_S = -\,a$}
Schnitt t_2 / t_3: $x_S\,(m_2 - m_3) = (c_3 - c_2) \rightarrow x_S = [-a - a] / [-(e/a) - (e/a)] = a^2 / e$.
$y_S = (-e/a) \cdot (a^2/e) + a = 0$. Wie erwartet, liegt der Schnittpunkt auf der x-Achse. ☑
{t_1 / t_4: $x_S = -\,a^2 / e$}