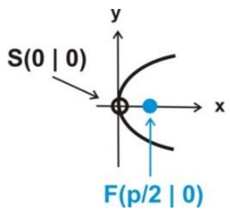
Kegelschnitte - Teil 5

5. Details: Parabel

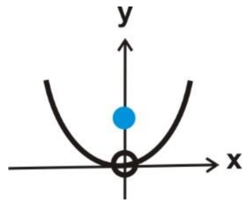
5.1 "Normallage" und "Standardlage"

Die Punkte auf der Parabel liegen symmetrisch zur Mittellinie, der "Achse der Parabel". In der "**Normallage**" ist dies die x-Achse des Koordinatensystems. Der Graph ist ausgehend vom Scheitel im Koordinatenursprung nach rechts geöffnet. Zur Definition einer Koordinatengleichung dient der Brennpunkt.

Die Punkte auf der Parabel liegen symmetrisch zur Achse der Parabel.
F ist der Brennpunkt, **S** der Scheitel
par: $y^2 = 2\ p\ x$



Bei Drehung um 90° bzw. äquivalent dazu einer Vertauschung der Variablen entsteht eine Form, die zur üblichen, gewohnten Darstellung von Funktionen f(x) passt, die "**Standardlage**".
par: $y = (1/2p)\ x^2$ (Die einfachste Form dazu ist f: $y = x^2$.)
Die "Achse der Parabel" ist hier die y-Achse des Koordinatensystems.



Die "Normalparabel" $y = x^2$ läuft durch das Minimum **S**(0 | 0) (der "Scheitel").
f: $y = a\ x^2$ bedeutet geometrisch eine Dehnung oder Stauchung. Damit kann für a < 0 die Parabel auch nach unten zeigen, also nur negative Werte annehmen; der Scheitel ist dann das Maximum. Zusammenhang p = 1/2a.

"Kontrollrechnung": 90° Drehung ist äquivalent zur Variablenvertauschung

Für eine Drehung um φ ist (in Vektorschreibweise) $\mathbf{x_g} = \mathbf{x_{gedreht}} = \mathbf{D\ x}$

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \rightarrow$ für $\varphi = 90°$ $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Für die Koordinaten: $x_g = -y$ und $y_g = x$

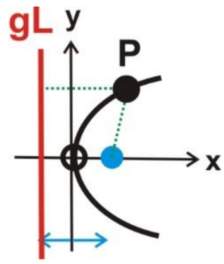
Eingesetzt in $y^2 = 2\ p\ x$: $(-x_g)^2 = 2\ p\ y_g \rightarrow y_g = (1/2p)\ x_g^2$ ☑

Allgemeine Form in der Standardlage

Die Parabel kann auch in Richtung x und y verschoben sein.
Dann ist der Scheitel **S**(x_o | y_o). Die allgemeine Form ist damit par: $\mathbf{y = a\ (x - x_o)^2 + y_o}$
Ausmultipliziert: $y = a\ x^2 - 2\ x\ x_o + x_o^2 + y_o$
Das ist der bekannte allgemeine Ausdruck als Polynom 2. Grades f: $y = a\ x^2 + b\ x + c$
Für den Scheitel gilt als Zusammenhang $x_o = -\ b/\ (2a)$ und $y_o = c - a x_o^2$.
Herleitung der Scheitelform aus der allgemeinen Form durch quadratische Ergänzung (± halber Koeffizient des linearen Terms):

$y = a\ x^2 + b\ x + c = a\ \{x^2 + b/a\ x\} + c = a\ \{x^2 + b/a\ x + \mathbf{(b/2a)^2 - (b/2a)^2}\} + c =$
$= a\ \{\ x + (b/2a)\}^2 + c - a\ (b/2a)^2$
$= a\ (x - x_o)^2 + y_o$ ✓

5.2 Brennpunkt und Leitlinie



Im Zusammenhang mit der Normallage ($y^2 = 2\,p\,x$) wurde definiert: Die Parabel ist die Menge aller Punkte, die von einem Brennpunkt **F**(p/2 | 0) und einer Leitlinie gL: x = - p/2 den gleichen Abstand haben.

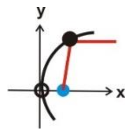
Man kann auch die Abstandsbedingung als Voraussetzung wählen und daraus die Koordinatengleichung herleiten.

Wo liegen Brennpunkt und Leitlinie in der Standardlage ($y = a\,x^2$, mit a = 1/2p)?
Eine 90° Drehung führt zu **F**(0 | p/2) und gL: y = - p/2.
Die Verschiebung **S**(0 | 0) → **S**(x_o | y_o) ist für jeden Punkt anzuwenden.
Damit **F**(x_o | p/2 + y_o) = **F**(x_o | 1/4a + y_o).
Die Dehnung/Stauchung mit a ist in p schon enthalten.
Die Verschiebung führt zu gL: $y = -p/2 + y_o = -1/4a + y_o$.

Kontrolle:
Abstand Scheitel zu Leitlinie (1) = Abstand Scheitel zu Brennpunkt (2) = p/2 = 1/4a
Der Abstand (1) ist als senkrechter Abstand beim gleichen x wie der Scheitel definiert.
Für die Abstandsquadrate
(1) $(x_o - x_o)^2 + (-1/4a + y_o - y_o)^2 = (1/4a)^2$ (zur Leitlinie)
(2) $(x_o - x_o)^2 + (1/4a + y_o - y_o)^2 = (1/4a)^2$ (zum Brennpunkt **F**)

Überprüfung, dass der Abstand von jedem Punkt auf der Parabel zum Brennpunkt bzw. zu Leitlinie gleich ist:
Für die Normallage:
par: $y^2 = 2\,p\,x$; **P**(x_o | y_o); Brennpunkt **F**(p/2 | 0); Leitlinie gL: x = - p/2
zum Brennpunkt: $d_1^2 = (x_o - p/2)^2 + y_o^2 = x_o^2 - p\,x_o + p^2/4 + 2\,p\,x_o = (x_o + p/2)^2$
zur Leitlinie (Lotabstand): $d_2^2 = (x_o - (-p/2))^2$
→ $d_1 = d_2$ ✓
Für die Standardlage:
par: $y = a\,x^2$; **P**(x_o | y_o); Brennpunkt **F**(0 | 1/(4a)); Leitlinie gL: x = - 1/(4a)
zum Brennpunkt: $d_1^2 = x_o^2 + (y_o - 1/4a)^2 = x_o^2 + y_o^2 - y_o/2a + 1/(16\,a^2)$
$y_o/2a = x_o^2/2$; $d_1^2 = y_o^2 + x_o^2/2 + 1/(16\,a^2)$
zur Leitlinie: $d_2^2 = (y_o + 1/4a)^2$ {gleiche x-Koordinate, weil Lotabstand)
$d_2^2 = y_o^2 + x_o^2/2 + 1/(16\,a^2)$
→ $d_1 = d_2$ ✓

5.3 Brennpunkt-Eigenschaft



Der Name "Brennpunkt" weist darauf hin, dass alle Strahlen, die parallel zur Parabelachse einfallen, in diesen Punkt reflektiert werden (und umgekehrt). Skizze für Normallage

Rechnerische Verifikation für die Standardlage "$y = a\,x^2$"
{Dabei werden keine weiteren Annahmen zur Lage der Geraden gemacht!}
Brennpunkt **F**(0 | 1/4a); Punkt auf der Parabel **P**(x_p | y_p). Strahl ausgehend von **F**.
Vektor $\overrightarrow{\mathbf{FP}} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p - 1/4a \end{pmatrix}$ = **e**; die Reflexion erfolgt an der Tangente im Punkt **P**.
Bekannt ist die Steigung der Tangente, $m = 2\,a\,x_p$ {Eine Normale dazu hat die Steigung m' = -1/m.}
Ein möglicher Vektor dazu: m' = Δy/Δx; wenn Δx = 1 ist Δy = m' → $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$
Reflexionsformel **r** = **e** - 2 (**e**·**n** / **n**·**n**) **n**
$\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = x_p - (a\,x_p^2 - 1/4a) / (2\,a\,x_p)$; $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1 + 1 / (2\,a\,x_p)^2$
{... Rechenarbeit nötig, aber interessant ist nur das Ergebnis!}
$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$ mit $T = (4\,a^2\,x_p^2 + 1) / (4\,a)$ { Reflektierte Strahlen parallel zur y-Achse. ☑}

Übung 1: Für <u>jeden</u> von **F** auf irgendeinen Punkt **P** auf der Parabel fallenden Strahl geht der reflektierte Strahl in Richtung x-Achse, ist also parallel zur Parabelachse!

a = 1/3; $x_P = 6$; **P**(6 | 12); **F**(0 | 3/4); $\mathbf{e} = \overrightarrow{\mathbf{FP}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 45/4 \end{pmatrix}$; m = 2 a x_p = 4; m' = -1/m = -1/4

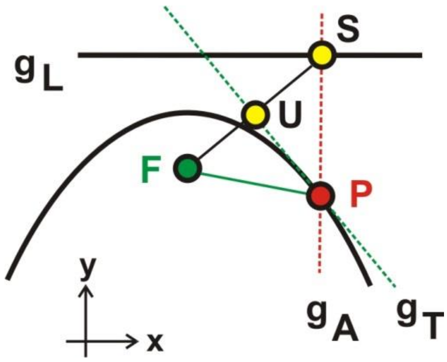
$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}$; **e·n** = 6 - 45/16 = 51/16; **n·n** = 1 + 1/16 = 17/16

$\mathbf{r} = \mathbf{e} - 2\,(\mathbf{e{\cdot}n} / \mathbf{n{\cdot}n})\,\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 45/4 \end{pmatrix} - 2\,(51/16 \cdot 16/17) \begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 45/4 \end{pmatrix} - 102/17 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 51/4 \end{pmatrix}$

Wir erhalten eine Parallele zur y-Achse als reflektierten Strahl zum einfallenden $\overrightarrow{\mathbf{FP}}$.

Übung 2: Ein anderer Versuch ist, diese Brennpunkt-Eigenschaft mit einer Kombination Skizze und Rechnung zu verifizieren. {Rechnerische Überprüfung für "y = a x^2"}

An einem Punkt **P** auf der Parabel betrachten wir die Linie $\overline{\mathbf{FP}}$ und eine Gerade g_A parallel zur Parabelachse. Die Gerade g_A schneidet die Leitlinie g_L im Punkt **S**. Die Skizze legt nun nahe, dass die Tangente g_T die Linie $\overline{\mathbf{FS}}$ halbiert, Schnittpunkt **U**.
Dann sehen wir 2 kongruente Dreiecke $\overline{\mathbf{PSU}}$ und $\overline{\mathbf{PFU}}$. Der Einfallswinkel (F-U-P) und der Ausfallswinkel (U-P-S) sind gleich.



⇒ Die Gerade vom Brennpunkt aus, $\overrightarrow{\mathbf{FP}}$, und die zur Parabelachse parallele Gerade (kollinear zu $\overrightarrow{\mathbf{SP}}$) beschreiben die Reflexion an **P**.

P(x_p | a x_P^2); **F**(0 | 1/4a); Leitlinie gL: y = - 1/4a

Die Koordinaten von **S** sind aus der Skizze ablesbar: **S**(x_p | -1/4a)

Als "Übung" kann man rechnen:

Gerade gPS: $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\,\mathbf{v}$; Leitlinie: gL: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4a \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnitt: gPS = gL; → s = x_p; t = {4 $a^2 x_p^2$ + 1} / {4a}; damit **S**(x_p | -1/4a)

U liegt in der Mitte von **F** und **S**: **U**(x_p/2 | 0)

F und die Leitlinie haben gleichen y-Abstand vom Scheitel;

U liegt auf der Höhe des Scheitels

"Rechnerisch" ist $\mathbf{u} = \mathbf{f} + (1/2)\,\overrightarrow{\mathbf{FS}}$

Schon vom Ansatz her sind $\overline{\mathbf{FU}}$ und $\overline{\mathbf{US}}$ gleich lang.

$(\text{Länge})^2 = x_p^2/4 + a^2/16$

$\overline{\mathbf{PU}}$ ist gleich für beide Dreiecke.

$\overline{\mathbf{FU}}$ ($\overline{\mathbf{US}}$, $\overline{\mathbf{FS}}$) und $\overline{\mathbf{PU}}$ sind orthogonal.

Skalarprodukt (für $\overline{\mathbf{FU}}$ und $\overline{\mathbf{PU}}$): $\begin{pmatrix} x_p/2 \\ -1/4a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x_p/2 \\ -a\,x_p^2 \end{pmatrix} = 0$

Die Bedingung für kongruente Dreiecke (2 gleiche Seiten, gleicher eingeschlossener Winkel) ist erfüllt.

→ Der Einfallswinkel (F-U-P) und der Ausfallswinkel (U-P-S) sind gleich.

Übung 3: Möglich ist auch eine **direkte Überprüfung, ob Einfallswinkel = Ausfallswinkel.**

Einfallender Strahl **e**, reflektierter Strahl **r**. (Parabel $y = a\,x^2$)
Einfallswinkel = Winkel zwischen **e** und der Tangente **t**
Ausfallswinkel = Winkel zwischen Tangente und $\overline{\mathbf{PS}}$

Vektoren: $\overrightarrow{\mathbf{FP}} = \mathbf{e} = \begin{pmatrix} x_p \\ a\,x_p^2 - 1/4a \end{pmatrix}$; Tangente: $m = 2\,a\,x_p \rightarrow \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\,a\,x_p \end{pmatrix}$;

für **r** am einfachsten ein Einheitsvektor in Richtung y-Achse $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Um Rechenarbeit zu sparen, wird "$\cos(\alpha, \beta) \cdot |\,\mathbf{t}\,|$" verglichen.
Für Ausfallswinkel β:
$\mathbf{r}\cdot\mathbf{t} = 2\,a\,x_p$; $|\,\mathbf{r}\,| = 1$; $\cos(\beta) \cdot |\,\mathbf{t}\,| = 2\,a\,x_p$
Für Einfallswinkel α:
Abkürzung $Z = (a\,x_p^2 - 1/4a)$
$\mathbf{e}\cdot\mathbf{t} = x_p + Z \cdot 2\,a\,x_p$; $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = x_p^2 + Z^2$
$\cos(\alpha) \cdot |\,\mathbf{t}\,| = \{x_p + Z \cdot 2\,a\,x_p\} / \{x_p^2 + Z^2\}^{1/2}$
nach einigen (!) Umformungen ist dies $2\,a\,x_p$
$\rightarrow$ Die Gleichheit bestätigt $\alpha = \beta$.

Zahlenbeispiel dazu (mit geringerem Rechenaufwand)
$a = 1/2$; $x_p = 3 \rightarrow$ Parabel $y = (1/2)\,x^2$; **P**(3 | 9/2); **F**(0 | 1/2)
Tangente Steigung m = 3; ausfallender Strahl parallel y-Achse
$\mathbf{e} = \overrightarrow{\mathbf{FP}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}\cdot\mathbf{t} = 15$; $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = 25$; $\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} = 10$; $\mathbf{r}\cdot\mathbf{t} = 3$; $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = 1$
Einfallswinkel $\cos(\alpha) = 15 / (5\,\sqrt{10}) \approx 0{,}949$; $\alpha \approx 18{,}4°$
Ausfallswinkel $\cos(\beta) = 3 / \sqrt{10}$; $\beta \approx 18{,}4°$
$\rightarrow \alpha = \beta$ bestätigt.

5.4 Tangenten

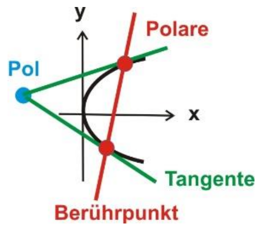
Für eine **Tangente** an die Parabel im Punkt **P**(x_p | y_p) gilt in der Normalform "$y^2 = 2\,p\,x$"
$y\,y_p = p\,(x + x_p)$
Mögliche Herleitung:
$y^2 = 2\,p\,x \rightarrow d\,y^2/dx = 2\,y\,dy/dx = 2\,p \rightarrow dy/dx = p / y$
am Punkt **P**: $dy/dx = p / y_p$ (das ist die Steigung m der Tangente)
Ansatz Gerade: $y = m\,x + c \rightarrow$ an P: $y_p = (p / y_p)\,x_p + c \rightarrow c = y_p - p\,x_p / y_p$
Tangente $y = p\,x / y_p + y_p - p\,x_p / y_p \rightarrow y\,y_p = p\,x + y_p^2 - p\,x_p = p\,x + 2\,p\,x_p - p\,x_p$

Für "$y = a\,x^2$" ist die Tangente $y = (2\,a\,x_p)\,x - a\,x_p^2$
$dy/dx = 2ax \rightarrow y_p = (2\,a\,x_p)\,x_p + c \rightarrow c = y_p - 2\,a\,x_p^2 \rightarrow y = (2\,a\,x_p)\,x + y_p - 2\,a\,x_p^2$
{Durch Koordinatenvertauschung erhält man wieder den vorigen Ausdruck für die Normalform.
$x = (2\,a\,y_p)\,y - a\,y_p^2$ und $x = a\,y^2$ also $x_p = a\,y_p^2 \rightarrow (x + x_p) = 2\,a\,y\,y_p \rightarrow y\,y_p = p\,(x + x_p)$}

In der allgemeinen Form "$y = a\,x^2 + b\,x + c$" etwas länger:
Tangente: $y = (2\,a\,x_p + b\,x_p)\,x + (a\,x_p + b)\,x_p - (2\,a\,x_p + b\,x_p)\,x_p + c$

Berührbedingung in der Normalform:
Die Gerade $y = m\,x + c$ soll eine Tangente sein. Dann berührt sie die Parabel in 1 Punkt; schneidet sie nicht (in 2 Punkten) und läuft nicht vorbei (kein reeller Schnittpunkt).
$y^2 = 2\,p\,x \rightarrow m^2\,x^2 + c^2 + 2\,m\,x\,c - 2\,p\,x = 0 \rightarrow m^2\,x^2 + 2\,(m\,c - p)\,x + c^2 = 0$
$x_{1,2} = \{2\,(p - m\,c) \pm [4\,m^2\,c^2 + 4\,p^2 - 8\,m\,c\,p - 4\,m^2\,c^2]^{1/2}\} / 2\,m^2$
1 Lösung folgt über die Diskriminante mit $4\,p^2 = 8\,m\,c\,p \rightarrow p = 2m\,c$

Polare und Tangenten von einem Pol aus



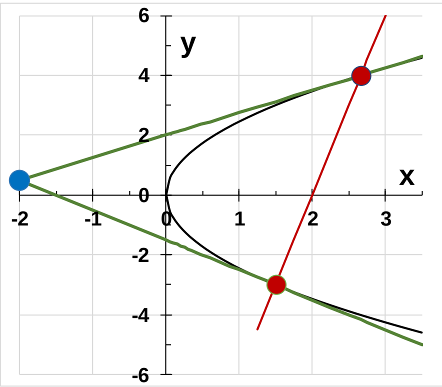
Die Polare ist die Gerade durch die beiden Berührpunkte der Tangenten, die durch einen Pol gehen, an die Parabel.
Pol **Q**(x_o | y_o)
Berührpunkte **B₁**(x_1 | y_1) und **B₂**(x_2 | y_2)

Tangenten, die durch den Pol und einen Berührpunkt gehen:
$y_1\, y_o = p\, (x_o + x_1)$ und $y_2\, y_o = p\, (x_o + x_2)$
Differenz: $y_o\, (y_1 - y_2) = p\, (x_1 - x_2)$
Damit ist $(y_1 - y_2) / (x_1 - x_2) = p / y_o = m$ die Steigung der Polaren {Gerade durch **B₁** und **B₂**}
Ansatz als Gerade: $(y - y_1) = m\, (x - x_1)$ {gleiches Endergebnis für **B₂**}
Einsetzen von m: $(y - y_1) = (p / y_o)\, (x - x_1)$
Umgeordnet: $y\, y_o - y_1\, y_o = p\, x - p\, x_1$
Für $y_1\, y_o$ Tangentengleichung eingesetzt: $y\, y_o - p\, x_o - p\, x_1 = p\, x - p\, x_1$
In einer Form ähnlich der Tangente: pol: $y\, y_o = p\, (x + x_o)$
Für die weiteren Schritte sind zwar allgemeine Formeln möglich. Im Regelfall führt man das aber für die konkreten Angaben einer Aufgabenstellung durch.
1) Der Schnitt der Polare mit der Tangente liefert eine quadratische Gleichung für x der Berührpunkte.
2) Aus Berührpunkt und Pol folgt die Tangentengleichung, z.B. in der Form y = m x + c.

Beispiel

Parabel in Normallage: p = 3
Pol: **Q**(-2 | 1/2)

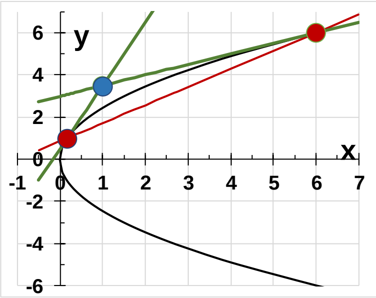
Lösung:
Polare: y = 6 x - 12
Berührpunkte **B₁**(8/3 | 4); **B₂**(3/2 | -3)
Tangente 1: y = (3/4) x + 2
Tangente 2: y = - x - 3/2



Rechenweg:
Polare: $y\,(1/2) = 3\,(x - 2) \rightarrow y = 6\,x - 12$
Schnitt mit Parabel: $y^2 = 6\,x \rightarrow 36\,x^2 + 144 - 144\,x = 6\,x \rightarrow 36\,x^2 - 150\,x + 144 = 0$
$\rightarrow 18\,x^2 - 75\,x + 72 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \{75 \pm [5625 - 5184]^{1/2}\}/36$
$\rightarrow = \{75 \pm 21\}/36;\ x_1 = 8/3;\ x_2 = 3/2$
Die y-Werte dazu folgen durch Einsetzen in die Parabel. (**?**) → schlecht!
Dann würden wegen $y = \pm\sqrt{2\,p\,x}$ jeweils 2 Werte erhalten. In einer Skizze könnte man zwar den passenden Wert auswählen, aber es ist umständlich.
Daher: Einsetzen in die Polare (eine lineare Gleichung)!
$y_1 = 6 \cdot 8/3 - 12 = 4;\ y_2 = 6 \cdot 3/2 - 12 = -3$
Aus den Berührpunkten und dem Pol die Tangenten:
t_1: $m_1 = (4 - 1/2) / (8/3 + 2) = 3/4;\ c_1 = 4 - (3/4) \cdot (8/3) = 2$
t_2: $m_2 = (-3 - 1/2) / (3/2 + 2) = -1;\ c_2 = -3 - (-1) \cdot (3/2) = -3/2$

Der Pol darf auch rechts vom Scheitel liegen, er muss nur "außerhalb" der Parabel liegen.

Ein Beispiel für p = 3
Pol **Q(**1 | 7/2)
Berührpunkte $\mathbf{B_1}$(6 | 6); $\mathbf{B_2}$(1/6 | 1)



Für die **Standardlage** gilt "$y = a x^2$". {Entsprechend einer Achsenvertauschung und a = 1 / 2p.}
Direkte Rechnung:

- **Tangente** an **P**(x_p | y_p) y = m x + c: m = dy/dx = 2 a x; c = y_p - m x_p
  an **P**: $y = (2 a x_p) x + y_p - (2 a x_p) x_p = (2 a x_p) x - a x_p^2$ oder $y = (2 a x_p) x - y_p$
  Möglich ist auch eine Form mit gleicher Struktur wie für die Normallage:
  $x x_p = (1/2a) (y + y_p)$

- **Tangente**, die durch den Pol **Q**(x_o | y_o) geht: t: y = m x + c.
  Schnitt mit $y = a x^2$: $a x^2 = m x + c$; m = 2 a x (weil t am Berührpunkt eine Tangente an die Parabel ist); c =y_o - m x_o (weil t auch durch den Pol geht).
  $a x^2 = (2 a x) x + y_o - (2 a x) x_o \rightarrow a x^2 - (2 a x_o) x + y_o = 0$
  $\rightarrow x_{1,2} = x_o \pm \sqrt{x_o^2 - {}^{y_o}/_a}$ (**Berührpunkte**)
  Der Rest der Rechnung wie vorher (y-Koordinaten der Berührpunkte und dann Tangenten aus zwei Punkten).

- Die Berechnung der y-Koordinate der Berührpunkte ist hier einfacher als in der Normallage. Anstelle einer Wurzel bei $y^2 = 2 p x$ und damit 2 Werten folgt bei $y = a x^2$ nur 1 Wert.

- Für die **Polare** können wir mit der Achsenvertauschung argumentieren und erwarten aus "$y y_o = p (x + x_o)$" für die Normalform "$x x_o = (1/2a) (y + y_o)$" für die Standardlage; aufgelöst "$y = (2 a x_o) x - y_o$".
  Etwas umständlich ist die direkte Verifikation als Gerade durch die Berührpunkte.
  $(y - y_1) = m (x - x_1)$; $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) = \Delta y / \Delta x$
  $\Delta x = (x_o - Z - x_o - Z) = - 2 Z$ {mit Z für $(x_o^2 - y_o/a)^{1/2}$}
  $\Delta y = a \{x_o^2 + Z^2 - 2 x_o Z - x_o^2 - Z^2 - 2 x_o Z \} = - 4 a x_o Z$
  $m = 2 a x_o$
  $(x - x_1) = x - x_o - Z$
  $(y - y_1) = y - a \{x_o^2 + Z^2 + 2 x_o Z\}$
  gesamt: $y - a x_o^2 - a Z^2 - 2 a x_o Z = 2 a x x_o - 2 a x_o^2 - 2 a x_o Z$
  $- a Z^2 = - a x_o^2 + y_o$
  $\rightarrow y = 2 a x x_o - y_o$

Als **Beispiel** dieselbe Situation wie vorher bei der Normallage (p = 3; **Q**(-2 | 1/2)
Es gilt dann a = 1/6 und **Q**(1/2 | -2) wegen der Achsenvertauschung.

Berührpunkte: $x_{1,2} = x_o \pm \sqrt{x_o^2 - {}^{y_o}/_a} = 1/2 \pm \sqrt{{}^1/_4 + 12} = 1/2 \pm 7/2$

$\mathbf{B_1}$: x = 4; $y = a x^2 = 8/3$; $\mathbf{B_2}$: x = -3; y = 3/2.

Tangenten: t_1: $m_1 = [8/3 - (-2)] / [4 - (1/2)] = 4/3$; $c_1 = 8/3 - (4/3)\cdot 4 = -8/3$
t_2: $m_2 = [3/2 - (-2)] / [-3 - (1/2)] = -1$; $c_1 = 3/2 - (-1)\cdot(-3) = -3/2$

Polare: $y = (2 a x_o) x - y_o = (2/6)\cdot(1/2) x - (-2) = (1/6) x + 2$

B₁(4 | 8/3); **B₂**(-3 | 3/2); t_1: y = (4/3) x - (8/3); t_2: y = - x - (3/2)
Vergleich mit dem vorigen Resultat (Normallage)

Die Koordinaten sind vertauscht.

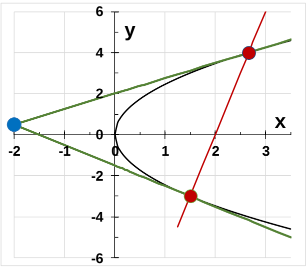
Normallage	Normallage vertauscht	Berechnung Standardlage
$\mathbf{B_1}$(8/3 | 4); $\mathbf{B_2}$(3/2 | -3)	$\mathbf{B_1}$(4 | 8/3); $\mathbf{B_2}$(-3 | 3/2)	$\mathbf{B_1}$(4 | 8/3); $\mathbf{B_2}$(-3 | 3/2)
Q(-2 | 1/2)	**Q**(1/2 | -2)	**Q**(1/2 | -2)

In den Geradengleichungen sind die Variablen vertauscht.

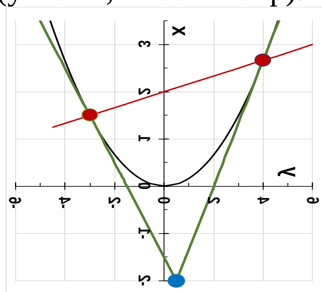
Normallage	aufgelöst	Berechnung Standardlage
t_1: y = (3/4) x + 2	x = (4/3) y - (8/3)	y = (4/3) x - (8/3)
t_2: y = - x - 3/2	x = - y - 3/2	y = - x - (3/2)
Polare: y = 6 x - 12	x = (1/6) y + 2	y = (1/6) x + 2

Die relative Lage der Tangenten usw. zur Parabel ist gleich!

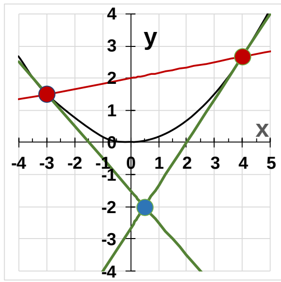
Die Äquivalenz ist auch bildlich zu sehen. Wenn die Grafik aus der Normallage ($y^2 = 2\,p\,x$) um 90° gedreht und horizontal gespiegelt wird, zeigt die neue x-Achse in Richtung der alten y-Achse (und analog für die andere Achse). Es entsteht die gleiche Situation wie für die direkte Rechnung in der Standardlage ($y = a\,x^2$, mit a = 1 /2p).



Normallage
Ausgangsorientierung



Normallage verdreht,
gespiegelt



Neue Grafik für Standardlage
(direkt berechnet)

Allgemeine Form "$y = a\,x^2 + b\,x + c$":
Ein direktes Arbeiten mit dieser Formel führt zu längeren Ausdrücken bei der Berechnung der Schnittpunkte und Tangenten.
Kürzer ist eine Koordinatenverschiebung - so, dass der Scheitel im Ursprung liegt, also Berechnung der Berührpunkte usw. in der Standardlage "$y = a\,x^2$".
Die allgemeine Form kann als Scheitelpunktsform "$y = (x - x_S)^2 + y_S$" geschrieben werden.
Scheitel **S**(x_S | y_S) mit $x_S = -\,b / (2\,a)$ und $y_S = c - b^2 / (4\,a)$.
Falls die "Aufgabenstellung" noch Punkte enthält, z.B. Berechnung von einem Pol aus, müssen die Punkte transformiert werden. **P**(x | y) → **P**($x - x_S$ | $y - y_S$)

Rücktransformation nach den Berechnungen in der Standardlage:
Punkte: **P**(x | y) → **P**($x + x_S$ | $y + y_S$)
Geraden: $y = m\,x + k \rightarrow y = m\,x + k + y_S - m\,x_S$

{Ohne eingezeichnete Achsen würde eine Skizze der Ergebnisse gleich aussehen wie die Skizze in der Standardlage!}

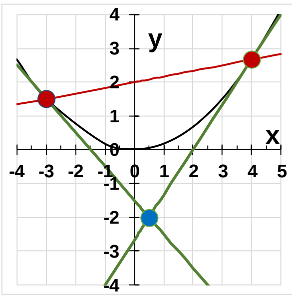
Beispiel {Unter Verwendung einer schon durchgeführten Rechnung}
Parabel: $y = (1/6)\,x^2 - (1/2)\,x + 27/8$
Pol: **Q**(2 | 1)
"Aufgabenstellung": Gesucht sind Tangenten und Berührpunkte vom Pol aus.
$x_S = (1/2) / (2/6) = 3/2$; $y_S = (27/8) - (1/4) / (2/3) = 3 \rightarrow$ **S**(3/2 | 3)
Parabel Scheitelpunktsform $y = (1/6)\,[x - (3/2)]^2 + 3$
Verschiebung des Scheitels in den Ursprung:
Parabel $y = (1/6)\,x^2$
Pol **Q**(2 - 3/2 | 1 - 3) = **Q**(1/2 |-2)
Für diese Parabel in Standardlage wurden vorher alle gewünschten Angaben berechnet.

Element	in Standardlage	in "Aufgabenstellung"
Pol	**Q**(1/2 |-2)	**Q**(2 | 1)
Berührpunkt 1	$\mathbf{B_1}$(4 | 8/3)	$\mathbf{B_1}$(11/2 | 17/3)
Berührpunkt 2	$\mathbf{B_2}$(-3 | 3/2)	$\mathbf{B_2}$(-3/2 | 9/2)
Tangente 1	$y = (4/3)\,x - (8/3)$	$y = (4/3)\,x - (5/3)$
Tangente 2	$y = -\,x - (3/2)$	$y = -\,x + 3$
Polare	$y = (1/6)\,x + 2$	$y = (1/6)\,x + 19/4$

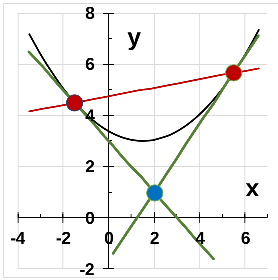
{Neue Grafik mit den Werten zur "Aufgabenstellung"}

Der grafische Vergleich zeigt die gleiche "relative Lage".

Punkte um **S**(x_S | y_S) verschoben.
Geraden mit gleicher Steigung und verschobenem Achsenabschnitt



Standardlage

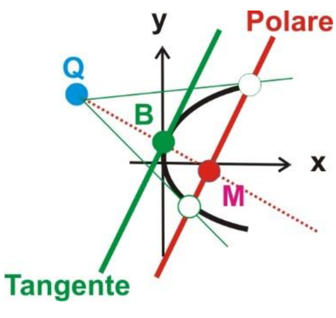


"Aufgabenstellung"

5.5 Ergänzende Übungen

Ü1 Zur Polaren

Zu einer Polaren existiert eine dazu parallele Tangente.
Es gibt den Pol **Q** und den Berührpunkt **B**. Zusätzlich gibt es den Punkt **M**, den Schnittpunkt der verlängerten Geraden $\overline{\mathbf{QB}}$ mit der Polaren.
Die **Skizze** ist **absichtlich schlecht! (irreführend)**
{Man soll die Lösung nicht schon aus der Skizze erraten können.}
Richtig ist: **Q**, **B** und **M** liegen auf einer Geraden.
Falsch sind, die Orientierung der eingezeichneten Geraden und die relative Lage der Punkte **Q**, **B** und **M.**

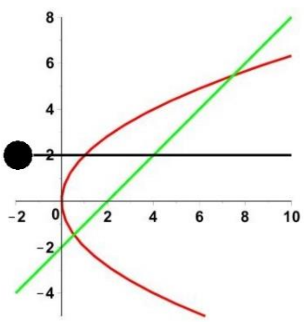


Q(x_o | y_o) sei bekannt. Die Parabel ist in der Normalform $y^2 = 2\,p\,x$ gegeben. Was weiß man dann über die Koordinaten von **B** und **M** und die Abstände $|\overrightarrow{\mathbf{QB}}|$ und $|\overrightarrow{\mathbf{BM}}|$?

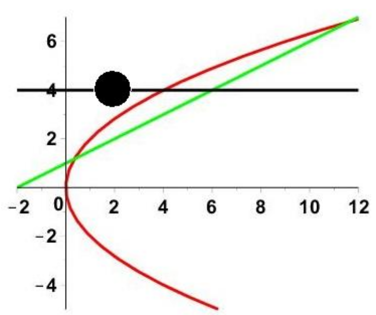
{Ein eventuell interessanter Zusammenhang. Für eine Bestimmung der Tangenten an die Parabel - dünn gezeichnet - und den Berührpunkten dazu, bietet es keinen Vorteil!}

L1 Bekannt: Polare $y\,y_o = p\,(x + x_o)$; Tangente: $y\,y_B = p\,(x + x_B)$
$\rightarrow$ Polare: $y = (p/y_o)\,x + (p\,x_o/y_o)$; Tangente: $y = (p/y_B)\,x + (p\,x_B/y_B)$
Weil beide Steigungen gleich sein sollen: $(p/y_o) = (p/y_B) \rightarrow$ $\mathbf{y_o = y_B}$
x_o ist gegeben. x_B ist, weil **B** auf der Parabel, $x_B = y_B^2/(2p) = y_o^2/(2p)$
$\overrightarrow{\mathbf{QB}}$ liefert die Geradengleichung $y = y_o$ {zwei Punkte mit gleicher y-Koordinate}
Schnitt der Geraden mit der Polaren: $y_o = (p/y_o)\,x + (p\,x_o/y_o) \rightarrow x = (y_o^2 - p\,x_o)/p = x_M$
Kontrolle, y dazu: $y = (p/y_o)\,(y_o^2 - p\,x_o)/p + (p\,x_o/y_o) = y_o = y_M$
$\Rightarrow$ **Q**, **B** und **M** liegen auf einer **Parallelen** zur **x-Achse**, die durch **Q** geht.
{**Q**(x_o | y_o), **B**(x_B | y_o), **M**(x_M | y_o)}
Abstandsquadrate: **Q**, **B**: $(x_o - x_B)^2$ {gleiches y} $= x_o - y_o^2/(2p)$;
B, **M**: $(x_B - x_M)^2 = y_o^2/(2p) - y_o^2/(p) + x_o = x_o - y_o^2/(2p)$
$\Rightarrow$ Die **Abstände** sind **gleich**.
M ist der Spiegelpunkt zu **Q**. Wenn der Pol **Q** auf der Parabel liegt, also zum Berührpunkt wird, ist die Polare gleich der Tangente. Dies sieht man auch direkt an den anfangs angegebenen Gleichungen. Für die Standardlage gilt Analoges, dann liegen **Q**, **B** und **M** auf einer Parallelen zur y-Achse.

Die Wahl **M** für den Punkt auf der Polaren ist mit einer Skizze verständlich {"Mittelpunkt"}.
Die allgemeine rechnerische Verifikation bestätigt das.
Zuerst die beiden Berührpunkte der Tangenten vom Pol aus.
{In der Skizze oben sind das die beiden nicht ausgefüllten Punkte.}
Schnitt der Polaren mit der Parabel:
$y^2 = 2\,p\,x = (p\,x / y_o + p\,x_o / y_o)^2 \rightarrow x^2 + x\,(2\,x_o - 2\,y_o^2 / p) + x_o^2 = 0$
$x_{1,2} = (y_o^2 / p - x_o) \pm [y_o^4 - 2\,p\,x_o\,y_o^2]^{1/2} / p = A \pm B / p$
Einsetzen in die Polare:
$y_{1,2} = A\,(p / y_o) \pm (B / p) / (p / y_o) + p\,x_o / y_o = (A\,p) / y_o \pm B / y_o + p\,x_o / y_o$
Mittelpunkt dieser beiden Berührpunkte:
$x \; = [A + B / p + A - B / p] / 2 = A = (y_o^2 / p - x_o) = x_M$
$y \; = [(A\,p) / y_o + B / y_o + p\,x_o / y_o + (A\,p) / y_o - B / y_o + p\,x_o / y_o] / 2 =$
$= (A\,p) / y_o + p\,x_o / y_o = (y_o^2 - x_o\,p) / y_o + p\,x_o / y_o = y_o = y_M$
$\Rightarrow$ **M** liegt auf der Polaren in der Mitte zwischen den beiden Berührpunkten der Tangenten vom Pol aus. {Der Pol muss "außerhalb" der Parabel liegen.}



Q(-2 | 2)
Parabel, Polare, y = y_o



Q(2 | 4) Beispiel zu "Diese Herleitung gilt für alle **Q**, die "außerhalb" der Parabel liegen".

{Erkennbar ist auch in der Skizze: gleiche Abstände $|\overrightarrow{\mathbf{QB}}| = |\overrightarrow{\mathbf{BM}}|$}

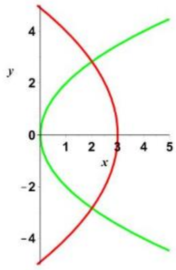
Ü2 Zur gegenseitigen Lage zweier Parabeln

Gegeben Parabel 1 par1: $y^2 = 2\,p_1\,x = 4\,x$. Eine zweite Parabel ist in der Normalform auf der x-Achse verschoben und der Parameter p_2 hat den doppelten Betrag von p_1. Ein Schnittpunkt der beiden Parabeln hat die y-Koordinate $2\sqrt{2}$. Parabel 2 hat an der x-Koordinate des Brennpunkts der Parabel 1 einen Wert $y^2 > 0$. Gesucht: zweite Parabelgleichung.

L2 Die verschobene Parabel 2 hat die Gleichung par2: $y^2 = 2\,p_2\,(x - x_o)$.
Am Schnittpunkt: $4\,x = \pm\,8\,(x - x_o)$
$\rightarrow$ für $p_2 > 0$: $x_S = 2\,x_o \rightarrow y_S^2 = 8\,x_o \rightarrow x_o = 1$
$\rightarrow$ für $p_2 < 0$: $x_S = (2/3)\,x_o \rightarrow y_S^2 = (8/3)\,x_o \rightarrow x_o = 3$
Brennpunkt der Parabel 1 $\mathbf{F}(p_1/2\,|\,0) = \mathbf{F}(1\,|\,0)$. Parabel 2 an dieser Stelle $y^2 = 2\,p_2\,(1 - x_o)$
$\rightarrow$ für $p_2 > 0$: $p_2 = +8$; $y^2 = 8\,(x - x_o) = 8\,(x - 1)$
$\rightarrow$ Für $x = 1$ also $y = 0$ {Scheitel der Parabel 2} $\rightarrow$ Widerspruch zur Forderung $y^2 > 0$.
$\rightarrow$ für $p_2 < 0$: $p_2 = -8$; $y^2 = -8\,(x - x_o) = -\,8\,(x - 3) \rightarrow$ reelle Lösung nur für $x \leq 3$, wie für eine nach links geöffnete Parabel zu fordern. An der Stelle $x = 1$ ist $y^2 > 0$, wie gefordert.

par1: $y^2 = 4\,x$

par2: $y^2 = -\,8\,(x - 3)$



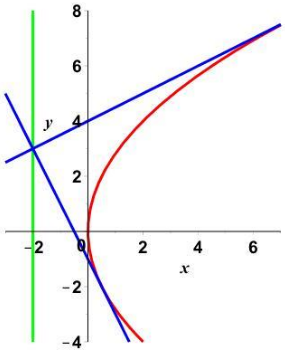
Ü3 Pol liege irgendwo auf der Leitlinie, dann Bedingung für die Tangenten

> Wenn der Pol auf der Leitlinie liegt, sind die beiden Tangenten an die Parabel orthogonal.
> Parabel in der Normallage.

Für "manuelle Arbeit" einfacher: Parabel mit $p = 4$ und der y-Koordinate des Pols $y = 3$.
{Die allgemeine Lösung wird aber auch angegeben.}

L3 Gleichung der Leitlinie: $x_L = -p/2$. Allgemeiner Punkt darauf $\mathbf{Q}(-p/2\,|\,y_L)$.
Für die Polare zu einem Pol $\mathbf{Q}(x_o\,|\,y_o)$ gilt $y\,y_o = p\,(x + x_o)$. Die Berührungspunkte der Tangenten sind die Schnittpunkte der Polaren mit der Parabel. Aus den zwei Punkten Pol und Berührungspunkt kann die Geradengleichung der Tangente angegeben werden.
Lösung für die Zahlenwerte
Pol: $x_o = -\,p/2 = -2$; $y_o = 3$; $p = 4$; Polare $y \cdot 3 = 4\,(x - 2) \rightarrow y = (4/3)\,x - (8/3)$
Schnitt: y Eingesetzt in $y^2 = 8\,x \rightarrow (16/9)\,x^2 - (64/9)\,x + (64/9) - 8\,x = 0 \rightarrow x_{1,2} = \{8;\,1/2\}$
y-Werte dazu durch Einsetzen in die Polare {einfacher als durch Einsetzen in die Parabel}
$x = 8 \rightarrow y = 8$; $x = 1/2 \rightarrow y = -2$ {Berührpunkte: $\mathbf{B_1}(8\,|\,8)$, $\mathbf{B_2}(1/2\,|\,-2)$}
Steigung 1: $m_1 = (8 - 3) / (8 + 2) = 1/2$; Steigung 2: $m_2 = (-2 - 3) / (1/2 + 2) = -2$
Achsenabschnitt, obwohl für die Aufgabenstellung nicht benötigt:
$c_1 = 8 - (1/2)\,8 = 4$; $c_2 = -2 - (-2)\,(1/2) = -1$
Tangente 1: $y = (1/2)\,x + 4$; Tangente 2: $y = -\,2\,x - 1$
Orthogonale Geraden $m_2 = -\,(1/\cdot m_1) \rightarrow -2 = -\,1 / (1/2)$ ✓

Parabel
  $y^2 = 8\,x$
Leitlinie
  $x = -2$
Pol
  Q$(-2 \mid 3)$
Tangenten
  t1: $y = x/2 + 4$
  t2: $y = -2\,x - 1$



Allgemeine Lösung

$x_o = -p/2$; $y_o = y_L$; Polare $y\,y_L = p\,(x - p/2) \rightarrow y = p\,(x - p/2) / y_L$

Schnittpunkte der Polaren mit der Parabel:

Einsetzen in $y^2 = 2\,p\,x \rightarrow (p^2/y_L^2)\,[x^2 - x\,p + p^2/4] = 2\,p\,x$

$x^2 - x\,[p + 2\,y_L^2 / p] + p^2/4 = 0$

$\rightarrow x_{1,2} = p/2 + y_L^2/p \pm [y_L^2 + y_L^4/p^2]^{1/2}$

$\rightarrow y_{1,2} = (p/y_L)\,x - p^2/(2\,y_L) = p^2/(2\,y_L) + y_L \pm [p^2 + y_L^2]^{1/2} - p^2/(2\,y_L)$

$= y_L \pm [p^2 + y_L^2]^{1/2}$

Steigung $m = \Delta y/\Delta x$; {zwischen Schnittpunkt und Pol}

$\Delta y = y_L \pm [p^2 + y_L^2]^{1/2} - y_L = \pm [p^2 + y_L^2]^{1/2}$

$\Delta x = p/2 + y_L^2/p \pm [y_L^2 + y_L^4/p^2]^{1/2} + p/2 = p + y_L^2/p \pm [y_L^2 + y_L^4/p^2]^{1/2}$

$= (1/p)\,[p^2 + y_L^2] \pm [y_L^2 + y_L^4/p^2]^{1/2}$

Abkürzungen: $A = p^2 + y_L^2$ und $B = [y_L^2 + y_L^4/p^2]^{1/2}$

$\rightarrow m = \pm A^{1/2} / [A/p \pm B]$

{Weil nur die Orthogonalität geprüft werden muss, berechnen wir die Achsenabschnitte nicht.}

Orthogonale Geraden, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_1 \cdot m_2 = \{+ A^{1/2} / [A/p + B]\} \cdot \{- A^{1/2} / [A/p - B]\} = -A / [A^2/p^2 - B^2]$

Nenner: $(1/p^2)\,[p^4 + 2\,p^2\,y_L^2 + y_L^4] - y_L^2 - y_L^4/p^2 = p^2 + 2\,y_L^2 + y_L^4 / p^2 - y_L^2 - y_L^4 / p^2$

$= p^2 + y_L^2 = A$

Damit $m_1 \cdot m_2 = -A/A = -1$ ✓

Ergänzung

Möglich ist auch ein anderer Ansatz:

Zwei orthogonale Tangenten schneiden sich auf der Leitlinie. $\{x = -p / 2\}$

Allgemeiner Ansatz für Tangente t_1: $y = m_1\,x + c_1 = (p\,x) / y_1 + (p\,x_1) / y_1$

Allgemeiner Ansatz für Tangente t_2: $y = m_2\,x + c_2 = (p\,x) / y_2 + (p\,x_2) / y_2$

Weil t_1 und t_2 orthogonal $m_2 = -1 / m_1 \rightarrow -y_1 / p = p / y_2 \rightarrow y_2 = -p^2 / y_1$

Der Berührpunkt **B₂**$(x_2 \mid y_2)$ liegt auf der Parabel $\rightarrow x_2 = y_2^2 / (2\,p) = -p^3 / (2\,y_1^2)$

$\rightarrow c_2 = (p\,x_2) / y_2 = -p^2 / (2\,y_1)$

Schnittpunkt $t_1 = t_2$: $(p / y_1)\,x + (p\,x_1) / y_1 = (-y_1 / p)\,x - p^2 / (2\,y_1)$

$\rightarrow x\,(p^2 + y_1^2) / (p\,y_1) = -(2\,p\,x_1 + p^2) / 2\,y_1 \rightarrow x = -p^2\,(2\,x_1 + p) / [2\,(p^2 + y_1^2)]$

B₁$(x_1 \mid y_1)$ auf der Parabel $\rightarrow y_1^2 = 2\,p\,x_1 \rightarrow x = -p^2\,(2\,x_1 + p) / (p^2 + 2\,p\,x_1) = -p / 2$ ✓