Kegelschnitte - Teil 7

7.1 Kegelschnitte - Gemeinsame Gleichung

Die verschiedenen Kegelschnitte entstehen, indem die Schnittebene eine verschiedene Neigung zur Hauptachse des Kreiskegels hat. Von senkrecht zur Hauptachse, also parallel zur Grundebene, ein Kreis; dann eine Ellipse; wenn die Schnittebene parallel zur Mantellinie ist, eine Parabel; und wenn die Schnittebene parallel zur Hauptachse ist eine Hyperbel.
Diese "Ähnlichkeit" ist auch in einer geeigneten Formel zu sehen. In der "Normallage" ist der Mittelpunkt der Ursprung des Koordinatensystems für Ellipse, Hyperbel (und Kreis). Bei der Parabel ist der Scheitel im Ursprung. Eine Gemeinsamkeit ist zu erkennen, wenn alle 4 Objekte in einer "Scheitelform" formuliert werden.

Für die **Parabel** liegt schon die Scheitelform vor: **par: $y^2 = 2\,p\,x$**.

♦ Scheitelform aus der Mittelpunktsform

Für den **Kreis** ist die Mittelpunktsform: kr: $x^2 + y^2 = r^2$.
Als "Scheitel" sei **S**(-r | 0) definiert.
In der "Scheitelform" ist **S**(0 | 0). Die Koordinaten darin sind $x' = x + r$ und $y' = y$.
Eingesetzt: $(x' - r)^2 + y'^2 = r^2 = x'^2 - 2\,r\,x' + r^2 + y'^2$
Geordnet: $y'^2 = 2\,r\,x' - x'^2$.
Mit $p = r$ und "ohne Striche": **kr: $y^2 = 2\,p\,x - x^2$**.

Für die **Ellipse** ist die Mittelpunktsform: ell: $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$.
Der linke Scheitel ist **S**(-a | 0).
Für die "Scheitelform" **S**(0 | 0) ist die Koordinatentransformation $x' = x + a$ und $y' = y$.
Eingesetzt: $\{x'^2 - 2\,a\,x' + a^2\} / a^2 + y'^2 / b^2 = 1$
Umgestellt: $y'^2 = b^2 - x'^2\,b^2 / a^2 + 2\,b^2\,x' / a - b^2$
Mit $p = b^2 / a$ und "ohne Striche": **el: $y^2 = 2\,p\,x - (p / a)\,x^2$**

Für die **Hyperbel** ist die Mittelpunktsform: hyp: $x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$.
Der rechte Scheitel **S**(a | 0) wird nach **S**(0 | 0) verschoben, $x' = x - a$ und $y' = y$.
Eingesetzt: $\{x'^2 + 2\,a\,x' + a^2\} / a^2 - y'^2 / b^2 = 1$
Umgestellt: $y'^2 = -\,b^2 + x'^2\,b^2 / a^2 + 2\,b^2\,x' / a + b^2$
Mit $p = b^2 / a$ und "ohne Striche": **hyp: $y^2 = 2\,p\,x + (p / a)\,x^2$**

{p ist je nach Kegelschnitt etwas Verschiedenes - also vorerst nur eine "schöne Abkürzung"!}

♦ y-Koordinate am Brennpunkt

Bei der **Parabel** ist der Brennpunkt **F**(p/2 | 0). Die y-Koordinate der Parabel an x des Brennpunkts ist $y^2 = 2\,p\,(p/2) \rightarrow y = \pm\,p$.

Beim **Kreis** kann der Mittelpunkt auch formal als Brennpunkt aufgefasst werden, also ist auch dort die y-Koordinate an x des Brennpunkts $y = \pm\,r$ $(\equiv \pm\,p)$.

Ellipse: Mittelpunktsform des linken Brennpunkts **F**(-e | 0).
y-Koordinate der Ellipse dazu: $e^2 / a^2 + y^2 / b^2 = (a^2 - b^2) / a^2 + y^2 / b^2 = 1$.
$y^2 = b^2 - b^2 + b^4 / a^2$; $y = \pm\,b^2 / a$ $(\equiv \pm\,p)$.

Hyperbel: Brennpunkt der rechten Hälfte **F**(e | 0) (Mittelpunktsform)
y-Koordinate der Hyperbel dazu: $e^2 / a^2 - y^2 / b^2 = (a^2 + b^2) / a^2 - y^2 / b^2 = 1$.
$y^2 = b^2 + b^4 / a^2 - b^2$; $y = \pm\,b^2 / a$ $(\equiv \pm\,p)$.

{Damit hat p in allen Kegelschnitten dieselbe geometrische Bedeutung! p ist die y-Koordinate am Brennpunkt.}

♦ Gemeinsame Scheitelgleichung $y^2 = 2\,p\,x + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2$.

ε wird "numerische Exzentrizität" genannt.

Kreis: $\varepsilon = 0$
$\varepsilon^2 - 1 = -1$

Parabel: $\varepsilon = 1$
$\varepsilon^2 - 1 = 0$

Ellipse: $\varepsilon = e/a$
$\varepsilon^2 - 1 = (a^2 - b^2) / a^2 - 1 = - b^2 / a^2 = - (b^2 / a) / a = - p / a$

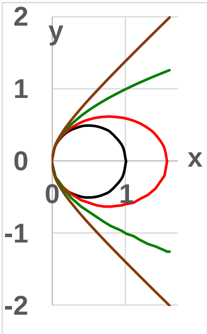
Hyperbel: $\varepsilon = e/a$
$\varepsilon^2 - 1 = (a^2 + b^2) / a^2 - 1 = b^2 / a^2 = (b^2 / a) / a = p / a$

{Für die Ellipse ist $0 < \varepsilon < 1$, für die Hyperbel $\varepsilon > 1$}

♦ Vergleich (Scheitelform)

Jeweils p = 0,5

Kreis	$\varepsilon = 0$
Ellipse	$\varepsilon = 0{,}6$
Parabel	$\varepsilon = 1$
Hyperbel	$\varepsilon = 1{,}4$



7.2 Parameterdarstellung

Dieses Problem wurde teilweise (für den Kreis) schon besprochen, siehe "Lineare Algebra 2 - Dokument K04".
Für einen Kreis in R^2 gilt "üblicherweise" $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$.
Es kann aber auch $\mathbf{x} = \mathbf{m} + \mathbf{r}\,v$ angesetzt werden.

In kartesischen Koordinaten ist $v = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Sei $\mathbf{M}(0 \mid 0)$; dann $\mathbf{x}^2 = r^2$; $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x = r\cos(t)$, $y = r\sin(t)$

Der Parameter t kann als Winkel im Bereich 0° bis 360° interpretiert werden. Bei beliebigen Werten t werden eventuell mehrfache Drehungen im Kreis durchgeführt. Liegt t im Intervall $[0; 2\pi]$ ist dies auch äquivalent zu einem Übergang von kartesischen in Polarkoordinaten.

Ein wesentlicher Vorteil für Rechnungen in R^2 ist nicht erkennbar. Wenn man die Beziehung aber explizit anschreibt, ist dies $\mathbf{x} = r\cos(t)\,\mathbf{e}_x + r\sin(t)\,\mathbf{e}_y$. Allgemein werden 2 linear unabhängige Vektoren benötigt, zweckmäßig sind diese aber orthonormiert.

➔ Damit ist direkt die Erweiterung nach R^3 möglich!
Mit 2 orthonormierten Vektoren $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$, die in einer Ebene liegen, gilt auch in R^3 eine analoge Gleichung $\mathbf{x} = \mathbf{m} + r\cos(t)\,\mathbf{b}_1 + r\sin(t)\,\mathbf{b}_2$ für einen Kreis in dieser Ebene.

Wenn für die anderen Kegelschnitte eine Darstellung x(t) und y(t) angegeben werden kann, können auch diese Kegelschnitte in R^3 durch $\mathbf{x} = \mathbf{m} + x(t)\,\mathbf{b}_1 + y(t)\,\mathbf{b}_2$ berechnet werden. $\mathbf{b}_{1,2}$ sind wieder zwei orthonormierte Vektoren in der Ebene, in der der Kegelschnitt liegen soll.

$\mathbf{b}_{1,2}$ muss passend zur gewünschten Orientierung gewählt werden.
Beispiel: Bei einer Ellipse in der Normallage liegt in R^2 die Hauptachse auf der x-Achse. In R^3 liegt dann die Hauptachse in der Richtung von $\mathbf{b}_1$.

♦ **Formeln** für die **Normallage**

Für die **Ellipse** gilt **$x(t) = a \cos(t)$** und **$y(t) = b \sin(t)$.**

$x/a = \cos(t)$ und $y/b = \sin(t)$; damit $x^2/a^2 + y^2/b^2 = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$.

$0 \le t \le 2\pi$ {andere t duplizieren die Werte}

Für die **Hyperbel** gilt **$x(t) = a \sec(t)$** und **$y(t) = b \tan(t)$**. $\{\sec(t) = 1 / \cos(t)\}$

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = \sec^2(t) - \tan^2(t) = 1$.

$\{1 / \cos^2(t) - \sin^2(t) / \cos^2(t) = [1 - \sin^2(t)] = \cos^2(t) = \cos^2(t) / \cos^2(t)\}$

$0 \le t \le 2\pi \setminus \{\pi/2; 3\pi/2\}$

Wie für den Kreis kann in diesen beiden Fällen t als Winkel interpretiert werden.

Alternativ können für die **Hyperbel** die Hyperbelfunktionen verwendet werden.
$x(t) = a \cosh(t)$ und **$y(t) = b \sinh(t)$**
t beliebig (reell); es wird nur die rechte Seite der Hyperbel erzeugt, für positives t die obere Hälfte, für negatives t die untere; die linke Seite der Hyperbel folgt mit $x = - a \cosh(t)$.

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

Eine übliche Form für die **Parabel** ist:
par: $y^2 = 2p\,x$: **$x(t) = t^2 / 2p$** und **$y(t) = t$**
t beliebig (reell); positives t erzeugt die obere Hälfte, negatives t die untere.

$y^2 = t^2 = 2\,p\,t^2 / 2p = 2p\,x$

Anschaulich ist t hier mit der Tangentensteigung, im Punkt P(x | y), verknüpft.

$dy/dx = dy/dt \cdot dt/dx = dy/dr / dx/dt = 1 / t/p = p / t$

Für t = 0 liegt der Scheitel in der "Normallage" vor, dort ist die Tangente parallel zur y-Achse, also die Steigung $dy/dx \to \propto$

Es ist auch möglich, Winkelfunktionen zu verwenden.
par: $y^2 = 2p\,x$: **$x(t) = p/2 + p \cos(t) / [1 - \cos(t)]$** und **$y(t) = p \sin(t) / [1 - \cos(t)]$**
$0 < t < 2\pi$

$y^2 = p^2 \sin^2(t) / [1 - \cos(t)]^2$

$2px = p^2 + 2\,p^2 \cos(t) / [1 - \cos(t)]$

$= \{p^2 [1 - \cos(t)]^2 + 2\,p^2 \cos(t)\,[1 - \cos(t)]\} / [1 - \cos(t)]^2$

$= p^2 \{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + 2\cos(t) - 2\cos^2(t)\} / [1 - \cos(t)]^2$

$= p^2 \{1 - \cos^2(t)\} / [1 - \cos(t)]^2 = y^2$

7.3 Formale Übung

Parameterdarstellung: Ist eine Drehung durch eine Änderung von t möglich?
(Was bewirkt eine Änderung von t tatsächlich?)

7.3.1 Eine falsche Vermutung

Eine Drehung um φ im Gegenuhrzeigersinn ist mit **x'** = **D**(φ) **x** möglich.

$\mathbf{D}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Dies gilt für die Koordinatendarstellung des Punkts. Dies ist trivialerweise auch möglich, wenn vorher ein Punkt **x** über eine Parameterdarstellung berechnet wurde.
Wenn ein Punkt (um den Koordinatenursprung als Fixpunkt) um φ und dann um α gedreht wird, ist dies äquivalent der einmaligen Drehung mit **D**(φ + α).

Eine **scheinbar gute, naheliegende Idee** ist für die Ellipse und Hyperbel, bei denen der Parameter t den Winkel zwischen dem Vektor vom Ursprung zum Punkt und der Hauptachse (in der Normallage x-Achse des (kartesischen) Koordinatensystems) bedeutet, einfach t um den gewünschten Drehwinkel zu ergänzen.

Dann wäre:
Ausgangslage: **x** = f(t)
gedreht um φ: **x'** = f(t + φ)

- Die Durchführung für eine Ellipse zeigt **aber**, dass damit insgesamt die Ellipse **gleich bleibt**! Zu jedem Punkt **x** entsteht zwar ein anderer Punkt **x'**, der aber gleich einem anderen Punkt **x** in der Ausgangslage ist!

<u>Formale Begründung</u>:
Ausgangslage **x** = $\begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$; "gedreht" **x'** = $\begin{pmatrix} a\cos(t+\varphi) \\ b\sin(t+\varphi) \end{pmatrix}$

x erfüllt die Koordinatengleichung (Voraussetzung): $x^2/a^2 + y^2/b^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

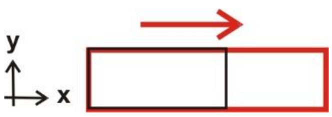
Auch der "gedrehte" Punkt **x'** erfüllt diese Koordinatengleichung!

x': $x = a\cos(t)\cos(\varphi) - a\sin(t)\sin(\varphi)$ {x, y hier Koordinaten von **x'**}
$y = b\sin(t)\cos(\varphi) + b\cos(t)\sin(\varphi)$
$x^2/a^2 = \cos^2(t)\cos^2(\varphi) + \sin^2(t)\sin^2(\varphi) - 2\sin(t)\cos(t)\sin(\varphi)\cos(\varphi)$
$y^2/b^2 = \sin^2(t)\cos^2(\varphi) + \cos^2(t)\sin^2(\varphi) + 2\sin(t)\cos(t)\sin(\varphi)\cos(\varphi)$
$x^2/a^2 + y^2/b^2 = \cos^2(t)\{\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\} + \sin^2(t)\{\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\} = 1$ ☑!

7.3.2 Einschub: Scherung und Streckung (nachfolgend benutzt)

Scherung und Streckung sind elementare "affine Abbildungen".

<u>Streckung</u> z.B. Parallelstreckung M_x

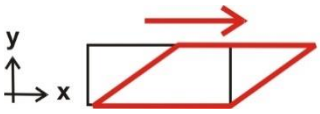


$M_x = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bewirkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} p\,x \\ y \end{pmatrix}$
$M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ bewirkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} p \\ q\,y \end{pmatrix}$

Die Kombination x, y ist kommutativ, $M_{xy} = M_x M_y = M_y M_x$: $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\,x \\ q\,y \end{pmatrix}$

Scherung

z.B. Scherung N_X



$N_x = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bewirkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + p\,y \\ y \end{pmatrix}$

$N_y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q & 1 \end{pmatrix}$ bewirkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y + q\,x \end{pmatrix}$

Bei der Kombination x, y ist die Reihenfolge wichtig!

$N_x\,N_y = \begin{pmatrix} p\,q+1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix}$; $N_y\,N_x = \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & p\,q+1 \end{pmatrix}$

Eine "vielleicht erwartete" Matrix für die Kombination zweier Scherungen $\begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix}$ würde dann eine zusätzliche Streckung erfordern, z.B. $\begin{pmatrix} 1/(pq+1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} N_x\,N_y$

Bei der Kombination Scherung und Streckung ist die Reihenfolge wichtig.

7.3.3 Erweiterte Überlegung

Wenn für die x- und y-Koordinate t durch t + φ ersetzt wird, also gleicher Winkel, ändert sich nichts. Die Parametergleichung beschreibt dieselbe Ellipse.

♦ Für eine **weitere formale Überlegung** lassen wir verschiedene Winkel für die x- und y-Koordinate zu.

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a\cos(t+\alpha) \\ b\sin(t+\beta) \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}_{alt} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$

Damit: $x = a\cos(t)\cos(\alpha) - a\sin(t)\sin(\alpha) = \cos(\alpha)\,x_{alt} - (b/a)\sin(\alpha)\,y_{alt}$

$y = b\sin(t)\cos(\beta) + b\cos(t)\sin(\beta) = \cos(\beta)\,y_{alt} + (a/b)\sin(\beta)\,x_{alt}$

$\mathbf{x} = \mathbf{D}(\alpha, \beta)\,\mathbf{x}_{alt}$ mit $\mathbf{D}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -(b/a)\sin(\alpha) \\ (a/b)\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$

Die Frage, wie sich eine Änderung von t auswirkt, ist mit dieser Matrix beantwortet. Offenkundig ist dies aber nicht mehr eine Drehung! Versuche, diese "Drehmatrix" zu erzeugen indem Einzeldrehungen (irgendwie) kombiniert werden, sind erfolglos. Von Interesse ist, ob es irgendwelche anderen Einzeltransformationen gibt, deren Kombination die "Drehmatrix" erzeugt. Zu einer Lösung kommt man, wenn geeignete Einzeltransformationen kombiniert werden.

Hilfreich ist, zuerst die Transformationen zu betrachten, wenn einer der Winkel Null ist.

1. Sei β = 0. "Drehung" mit α: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a\cos(t+\alpha) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$

   x-Koordinate: $a\cos(t)\cos(\alpha) - a\sin(t)\sin(\alpha)$; y-Koordinate = y_{alt}

   In einer Matrixformulierung: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -(a/b)\sin(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$

   Diese Matrix mit bekannten (elementaren) affinen Abbildungen beschrieben werden?
   Die gewünschte Matrix für die "Drehung" kann durch eine (geeignete) Scherung, dann eine (geeignete) Streckung erzeugt werden:

   $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -(a/b)\tan(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -(a/b)\sin(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☑

2. Sei $\alpha = 0$. "Drehung" mit β: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t+\beta) \end{pmatrix}$

   y-Koordinate: b sin(t) cos(β) + b cos(t) sin(β); x- Koordinate = x_{alt}

   In einer Matrixformulierung: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (a/b)\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$

   Beschreibung mit bekannten affinen Abbildungen: Scherung, dann Streckung

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (a/b)\tan(\beta) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (a/b)\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$ ☑

3. Sei $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. "Drehung" $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a\cos(t+\alpha) \\ b\sin(t+\beta) \end{pmatrix}$

   $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -(b/a)\sin(\alpha) \\ (a/b)\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$

   Kombinierte Scherung, dann kombinierte Streckung

   $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -(a/b)\tan(\alpha) \\ (a/b)\tan(\beta) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -(b/a)\sin(\alpha) \\ (a/b)\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$ ☑

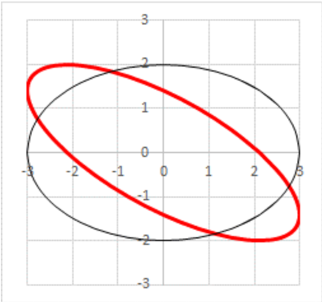
4. Wenn $\alpha = \beta$ führt die Transformation zur gleichen Ellipse. Die Transformationsmatrix ist aber nicht gleich der Einheitsmatrix. Jeder Punkt wird in einen anderen transformiert, der aber auch auf der Ausgangsellipse liegt! ☑
   Wenn $\alpha = \beta = 0$ dann ist die Transformationsmatrix gleich der Einheitsmatrix. ☑

- Die anfängliche Vermutung, f(t + φ) anstelle von f(t) würde eine Drehung um φ bewirken, ist falsch! Es entsteht die gleiche Ellipse.
- Wenn für die x- und y-Koordinate verschiedene Winkel α, β eingesetzt werden, erfolgt zwar eine Drehung, aber nicht um den Winkel α bzw. β, und mit einer zusätzlichen Verzerrung.

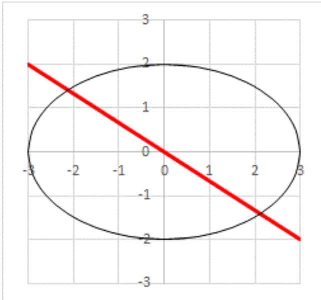
➔ Was als "Drehung" gedacht war, lässt sich als Kombination von Streckungen und Scherungen (elementare affine Abbildungen) beschreiben.

Beispiel

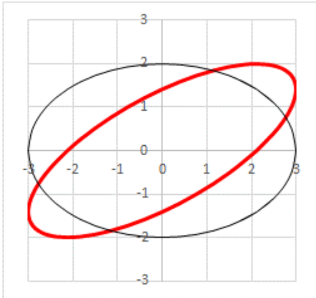
Ellipse mit a = 3, b = 2.



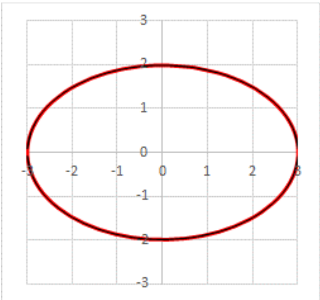
$\alpha = 45°$, $\beta = 0°$ **(1)**



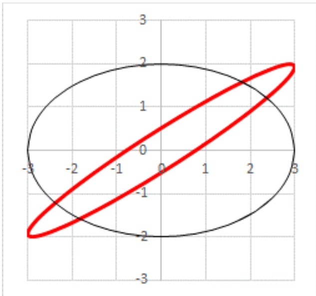
$\alpha = 90°$, $\beta = 0°$ **(2)**



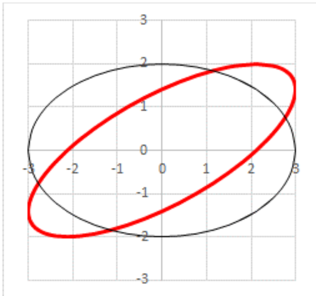
$\alpha = 315°$ (-45°), $\beta = 0°$ **(3)**



$\alpha = 77°$, $\beta = 77°$ **(4)**



$\alpha = 45°$, $\beta = 120°$ **(5)**



$\alpha = 45°$, $\beta = 90°$ **(6)**

(1) $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ führt zu einer "Drehung" und einer Verzerrung
Der "Drehwinkel" ist (auch nach dem Betrag) nicht 45°!

(2) Für $\alpha = 90°$ ist die Verzerrung so groß, dass eine Gerade entsteht.

Die Transformationsmatrix ist dann $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -(a/b)\sin(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(a/b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Das liefert = $\begin{pmatrix} 0 & -(a/b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a/b)y \\ y \end{pmatrix}$, also die Ursprungsgerade y = -(b/a) x

(3) Ein negatives α zum Winkel in (1) liefert das Spiegelbild an der y-Achse.

(4) Für jedes $\alpha = \beta$ liefert die Transformation wieder die Original-Ellipse.

(5), (6) Gleiches α und verschiedenes β ($\neq \alpha$) liefert gleiche "Drehung",
aber verschiedene Verzerrung

7.4 Abstandsbeziehungen

Es gelten für alle Punkte eines Kegelschnitts Abstandsbeziehungen zum Brennpunkt.
Formal erweitert ist beim Kreis der Mittelpunkt auch der Brennpunkt.
Um mögliche Abstandbeziehungen zu erweitern, werden auch andere geometrische Objekte berücksichtigt.

- Der Abstand eines Punktes zu einem Brennpunkt ist konstant.
  $\Rightarrow$ **Kreis**
  Trivial aus der Definition des Kreises.
- Die Summe der Abstände eines Punkts zu zwei Brennpunkten ist konstant.
  $\Rightarrow$ **Ellipse**
  (Auch schon besprochen in Kapitel 4.3)
  {Herleitung als Wiederholung; ohne die benutzten Ersetzungen entstehen längere Ausdrücke.}}
  P$(x_o \mid y_o)$; **F1**$(-e \mid 0)$; **F2**$(+e \mid 0)$; $e^2 = a^2 - b^2$
  $d_1 = \overline{\mathbf{PF_1}}$; $d_2 = \overline{\mathbf{PF_2}}$; $d_1^2 = [x_o - (-e)]^2 + y_o^2$; $d_2^2 = (x_o - e)^2 + y_o^2$
  Für y_o die Ellipsengleichung: $y_o^2 = b^2 - x_o^2\, b^2 / a^2$
  b durch e ersetzen: $b^2 = a^2 - e^2$
  $d_1^2 = x_o^2 + 2\,e\,x_o + e^2 + y_o^2 = x_o^2 + 2\,e\,x_o + e^2 + (a^2 - e^2) - x_o^2\,(a^2 - e^2) / a^2$
  $\quad = x_o^2 + 2\,e\,x_o + \{e^2 + a^2 - e^2 - x_o^2 + x_o^2\,e^2 / a^2\}$
  $\quad = a^2 + 2\,e\,x_o + x_o^2\,e^2 / a^2 = [a + x_o\,e / a]^2$
  $d_2^2 = x_o^2 - 2\,e\,x_o + e^2 + y_o^2 \rightarrow d_2^2 = [a - x_o\,e / a]^2$
  Damit $\mathbf{d_1 + d_2 = 2\,a}$
  Weil für $d_{1,2}$ Beträge gelten, kann direkt $d_{1;2} = a \pm x_o\,e / a$ eingesetzt werden. $e < a$; $|\,x_o\,| \le a$;
  damit auch $a - x_o\,e / a$ positiv.
- Die Differenz der Abstände eines Punkts zu zwei Brennpunkten ist konstant.
  $\Rightarrow$ **Hyperbel**
  (Schon besprochen in Kapitel 6.1)
  P, **F1,2** und $d_{1,2}$ wie bei der Ellipse; $e^2 = a^2 + b^2$; $y_o^2 = -\,b^2 + x_o^2\,b^2 / a^2$
  $d_1^2 = x_o^2 + 2\,e\,x_o + e^2 + y_o^2 = x_o^2 + 2\,e\,x_o + e^2 - (e^2 - a^2) + x_o^2\,(e^2 - a^2) / a^2$
  $\quad = x_o^2 + 2\,e\,x_o + \{e^2 - e^2 + a^2 + x_o^2\,e^2 / a^2 - x_o^2\}$
  $\quad = a^2 + 2\,e\,x_o + x_o^2\,e^2 / a^2 = [a + x_o\,e / a]^2$
  $d_2^2 = x_o^2 - 2\,e\,x_o + e^2 + y_o^2 \rightarrow d_2^2 = [a - x_o\,e / a]^2$
  Weil x_o auf 2 verschiedenen Ästen liegen, kann ist eine Fallunterscheidung nötig.
  (In 6.1 haben wir die Grenzen für x_o eingesetzt, hier eine Alternative)
  Es gilt stets: $e > a$; $|\,x_o\,| > a$; e und a sind positiv, Vorzeichen sind schon in den Koordinatenangaben enthalten; damit ist $|\,x_o\,e / a\,| > a$. Abkürzung $Z = x_o\,e / a$
  $d_{1,2}$ werden stets als positive Wurzel von $d_{1,2}^2$ betrachtet.
  a) x_o auf dem rechten Hyperbelast; damit $d_1 = a + Z$ positiv.
     $d_2 = a - Z$ negativ; der positive Betrag ist dann: $-\,a + Z$.
     Differenz (der zwei positiven Werte) $\mathbf{|\,d_1 - d_2\,| = 2a}$
  b) x_o auf dem linken Hyperbelast; damit ist Z negativ.
     d_1 ist negativ, weil $|\,Z\,| > a$; positiver Betrag: $-\,a - Z$.
     d_2 ist positiv, $-\,(-\,Z)$ positiv; $d_2 = a - Z$ belassen.
     Differenz $\mathbf{|\,d_1 - d_2\,| = 2a}$ {oder $|\,-\,2\,a\,|$}
- Keine Bedingung für den Abstand zum Brennpunkt
  $\Rightarrow$ **Parabel**
  (höchstens die triviale Bedingung, dass $d \ge 0$ ist)

Weil wir Abstandsbeziehungen für die Summe und Differenz haben, ist auch interessant, ob eine Beziehung für das Produkt und den Quotienten gilt!
(Auch wenn das Objekt nicht mehr ein Kegelschnitt sein muss)

- Der Quotient der Abstände eines Punkts zu zwei Punkten **A** und **B** ist konstant ($\neq 1$).
  $\Rightarrow$ **Kreis** (des Appolonios)

Die Punkte **A**, **B** und der Mittelpunkt des Kreises **M** liegen auf einer Geraden.
d sei der Abstand $\overline{\mathbf{AB}}$. Zur Herleitung eine einfache Geometrie.
A(0 | 0); **B**(d | 0); **M**(m | 0); **P**(x | y)
$\overline{\mathbf{AP}} = \lambda\, \overline{\mathbf{BP}} \rightarrow [x^2 + y^2]^{1/2} = \lambda\, [(x - d)^2 + y^2]^{1/2} \rightarrow x^2 + y^2 = \lambda^2\, [x^2 - 2\,x\,d + d^2 + y^2]$
$x^2\,(\lambda^2 - 1) - 2\,\lambda^2\,d\,x + y^2\,(\lambda^2 - 1) + \lambda^2\,d^2 = 0$
$\rightarrow x^2 - [2\,\lambda^2\,d / (\lambda^2 - 1)]\,x + y^2 + \lambda^2\,d^2 / (\lambda^2 - 1) = 0$
$\rightarrow [x - \lambda^2\,d / (\lambda^2 - 1)]^2 + y^2 = \lambda^4\,d^2 / (\lambda^2 - 1)^2 - \lambda^2\,d^2 / (l^2 - 1) = \lambda^2\,d^2 / (\lambda^2 - 1)^2$
$\rightarrow$ **Kreis** mit Radius $\mathbf{r = \lambda\, d / |\lambda^2 - 1|}$ und $m = \lambda^2\,d / (\lambda^2 - 1)$
{r gilt allgemein, m natürlich nur für die gewählte einfache Geometrie}
Wenn - wie angegeben - A links von B liegt, liegt der Mittelpunkt des Kreises für $\lambda > 1$ rechts von B und für $\lambda < 1$ links von A.
{Als Verhältnis zweier positiver Abstände ist $\lambda > 0$.}

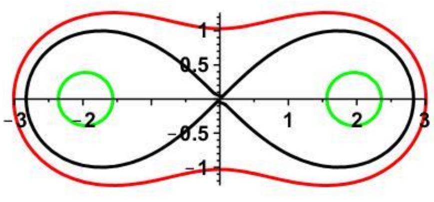
- Der Abstand eines Punkts zu zwei Punkten **A** und **B** ist gleich.
  Spezialfall des konstanten Quotienten ($\lambda = 1$)
  $\Rightarrow$ **Gerade (Mittelsenkrechte) über $\overrightarrow{AB}$**
  Geometrie wie vorher
  $[x^2 + y^2]^{1/2} = 1\cdot[(x - d)^2 + y^2]^{1/2} \rightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 2\,x\,d + d^2 + y^2$
  $\rightarrow$ $\mathbf{x = d/2}$

- Das Produkt der Abstände eines Punkts zu zwei Punkten **A** und **B** ist konstant
  $\Rightarrow$ **Cassini-Kurve**, speziell **(Bernoulli-)Lemniskate**
  Die entstehenden Kurven sind symmetrisch zum Mittelpunkt zwischen **A** und **B**.
  Zur Herleitung wieder eine einfache Geometrie.
  A(-e | 0); **B**(+e | 0); **P**(x | y)
  Produkt $\overline{\mathbf{AP}} \cdot \overline{\mathbf{BP}} = a^2$ {Quadrat um zu verdeutlichen, dass das Produkt positiv ist}
  $[(x + e)^2 + y^2]^{1/2}\,[(x - e)^2 + y^2]^{1/2} = a^2$
  $[(x + e)^2 + y^2]\,[(x - e)^2 + y^2] = a^4$
  $(x + e)^2\,(x - e)^2 + y^2\,[(x + e)^2 + (x - e)^2] + y^4 = a^4$
  $(x^2 - e^2)^2 + 2\,y^2\,[x^2 + e^2] = a^4 - y^4$
  $x^4 - 2\,x^2\,e^2 + e^4 + 2\,y^2\,x^2 + 2\,y^2 e^2 + y^4 = a^4$
  $x^4 + 2\,x^2\,y^2 + y^4 + 2\,e^2\,(y^2 - x^2) = a^4 - e^4$
  $\mathbf{(x^2 + y^2)^2 - 2\,e^2\,(x^2 - y^2) = a^4 - e^4}$ (Cassini-Kurve)
  Spezialfall a = e
  $\mathbf{(x^2 + y^2)^2 - 2\,e^2\,(x^2 - y^2) = 0}$ (Lemniskate)
  {Nur bei der Lemniskate ist der Koordinatenursprung auch ein Punkt der Kurve.}

  Mögliche Kurvenformen:
  • Kurvenform, die an eine Ellipse "erinnert"
  • die "liegende Acht" bzw. "Unendlich"
  • zwei Ellipsen um die Punkte **A**(-e | 0) und **B**(e | 0)

  Beispiel zu e = 2

  a > e {a = 9/4}
  a = e {a = 2}
  a < e {a = 5/4}



- Ellipse
  Hyperbel
  Parabel

  Konstant ist jeweils $\varepsilon = \dfrac{\textbf{Abstand zum Brennpunkt}}{\textbf{Abstand zur Leitlinie}}$

Jeweils Normalform

ell: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

Brennpunkt: $F_{1,2}(\pm e \mid 0)$; $e = \sqrt{a^2 - b^2}$
Leitlinie: $x = \pm d$; $d = a^2 / e$
$e < a$
$\Rightarrow$ Verhältnis $\boldsymbol{\varepsilon} = a^2 / e \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon < 1}$

hyp: $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$

Brennpunkt: $F_{1,2}(\pm e \mid 0)$; $e = \sqrt{a^2 + b^2}$
Leitlinie: $x = \pm d$; $d = a^2 / e$
$e > a$
$\Rightarrow$ Verhältnis $\boldsymbol{\varepsilon} = e / a \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon > 1}$

par: $y^2 = 2 p x$

Brennpunkt: $F(p/2 \mid 0)$
Leitlinie: $x = - p/2$
$\Rightarrow$ Verhältnis $\boldsymbol{\varepsilon = 1}$

{Bei der Ellipse und Hyperbel ist jeweils die dem Brennpunkt nächste Leitlinie einzusetzen! Als Abstand zur Leitlinie ist der Lotabstand definiert.}

Ellipse

$\mathbf{P}(x_o \mid y_o)$; rechter Brennpunkt $\mathbf{F}(e \mid 0)$ und rechte Leitlinie g: $x = d = a^2 / e$
$e^2 = a^2 - b^2$
ell: $y^2 = b^2 - (b^2 / a^2)\, x^2 = (a^2 - e^2) - (a^2 - e^2)\, x^2 / a^2 = a^2 - e^2 - x^2 + (e^2 / a^2)\, x^2$
$d_1 = \overline{\mathbf{PF}}$; $d_2 = \overline{\mathbf{Pg}}$
$d_1^2 = (x_o - e)^2 + y_o^2$
$d_2^2 = (x_o - a^2 / e)^2$ {gleiche y-Koordinate}
$d_1^2 = x_o^2 - 2 e x_o + e^2 + y_o^2 = x_o^2 - 2 e x_o + e^2 + a^2 - e^2 - x_o^2 + (e^2 / a^2)\, x_o^2$
$= a^2 - 2 e x_o + x_o^2 e^2 / a^2 = (a - x_o e / a)^2 = (a^2 - x_o e)^2 / a^2$
$d_2^2 = (e x_o - a^2) / e^2$
$\varepsilon^2 = d_1^2 / d_2^2 = e^2 / a^2 \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon = e / a}$

Hyperbel

gleichartige Herleitung, nur Vorzeichenänderungen $e^2 = a^2 + b^2$ und $y^2 = b^2 + (b^2 / a^2)\, x^2$
$\rightarrow \boldsymbol{\varepsilon = e / a}$

Parabel

$\mathbf{P}(x_o \mid y_o)$; Brennpunkt $\mathbf{F}(p/2 \mid 0)$; Leitlinie g: $x = - p/2$
$d_1 = \overline{\mathbf{PF}}$; $d_2 = \overline{\mathbf{Pg}}$
$d_1^2 = (x_o - p/2)^2 + y_o^2 = x_o^2 - p x_o + p^2/4 + 2 p x_o = (x_o + p/2)^2$
$d_2^2 = (x_o - (-p/2))^2$
$\rightarrow d_1 = d_2 \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon = 1}$