Kegelschnitte - Teil 8

Hier werden (einführend) über Koeffizientenvergleich Translation und Rotation behandelt. Die elegantere Methode wird nach der Erklärung der "Hauptachsentransformation" in Kapitel 10 vorgestellt.

Allgemeiner "quadratischer Ausdruck" (Quadrik)

In R^2 ist ein allgemeiner Ausdruck Q: $A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$ möglich. Alle Kegelschnitte sind in dieser Formel enthalten.

{Zusätzlich sind Sonderfälle Punkt, Gerade(n) und leere Menge möglich. Diese entstehen bei Schnitt durch die Kegelspitze oder Schnitt mit einem Kreiszylinder - formal entsprechend einer Kegelspitze im Unendlichen.}

Q beschreibt dann alle Fälle, also auch eine Verschiebung und Drehung. Prinzipiell lassen sich aus Q auch die bisher bekannten "Normallagen" herstellen. Dies wird Hauptachsentransformation genannt.

Die bekannten Formeln für die Normallage sind - direkt in der Form von Q angegeben:

Kreis	$x^2 + y^2 - r^2 = 0$
Ellipse	$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$
Hyperbel	$b^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$
Parabel	$y^2 - 2 p x = 0$

{Offenkundig bestehen dann verschiedene Bedingungen für die Koeffizienten A ... F. Weiteres dazu in 8.3.}

8.1 Translation

Eine Translation führt dazu, dass weitere Koeffizienten, die vorher = 0 sind ≠ 0 werden.

{Zusätzlich Änderung von F}

Der Ursprung soll verschoben werden **M**$(0 \mid 0) \rightarrow$ **M'**$(x_o \mid y_o)$

Beispiel Kreis: $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - r^2 = x^2 + y^2 + (- 2 x_o) x + (- 2 y_o) y + [r^2 - x_o^2 - y_o^2] = 0$

Eine analoge Form mit A, C, D, E, F ≠ 0 (und B = 0) für Ellipse und Hyperbel.

Beispiel Parabel: $(y - y_o)^2 - 2 p (x - x_o) = y^2 + (- 2 p) x + (- 2 y_o) y + [y_o^2 + 2 p x_o] = 0$

Ein Koeffizient A oder C ist bei der Parabel 0.

➔ Falls nur eine Translation vorliegt, ist das gemischte Glied "xy" stets 0!

Umkehrung der Translation, also die Erzeugung der zu Q gehörenden Normalform. Dazu kann entweder ein Koeffizientenvergleich oder allgemeiner ein "visueller" Vergleich nach einer quadratischen Ergänzung benutzt werden.

♦ 8.1.1 Übungsbeispiel Ellipse.

Gegeben Q: $4 x^2 + 9 y^2 - 32 x - 90 y + 253 = 0$;

gesucht Normalform und Koordinaten des Mittelpunkts **M'**.

Allgemein: ell: $b^2 (x - x_o)^2 + a^2 (y - y_o)^2 = a^2 b^2$

Q: $b^2 x^2 + a^2 y^2 + (- 2 b^2 x_o) x + (- 2 a^2 y_o) y + [a^2 y_o^2 + b^2 x_o^2 - a^2 b^2] = 0$

Koeffizientenvergleich:

$b^2 = 4$; $a^2 = 9$; $x_o = - 32 / (- 8) = 4$; $y_o = - 90 / (18) = 5$

{Kontrolle: $9 \cdot 25 + 4 \cdot 16 - 9 \cdot 4 = 253$} $\rightarrow$ ell: $4 x^2 + 9 y^2 = 36$; **M'**$(4 \mid 5)$

Quadratische Ergänzung:

$4 x^2 - 32 x + 9 y^2 - 90 y + 253 = 0$

$4 (x^2 - 8 x) + 9 (y^2 - 10 y) + 253 = 0$ {Koeffizient von x^2, y^2 auf 1}

$4 (x^2 - 8 x + 16 - 16) + 9 (y^2 - 10 y + 25 - 25) + 253 = 0$ {Ergänzung}

$4 (x - 4)^2 + 9 (y - 5)^2 + 253 - 64 - 225 = 4 (x -4)^2 + 9 (y - 5)^2 - 36 = 0$

Vergleich: $x_o = 4$; $y_o = 5$; $a^2 = 9$; $b^2 = 4$; Kontrolle: $a^2 b^2 = 36$.

♦ 8.1.2 Übungsbeispiel Parabel.

Gegeben Q: $y^2 - 3x - 6y + 15 = 0$

Allgemein: Q: $y^2 + (-2p)x + (-2y_o)y + [y_o^2 + 2p x_o] = 0$

Koeffizientenvergleich:

$p = 1{,}5$; $y_o = 3$; $x_o = (15 - 9) / 3 = 2 \rightarrow$ par: $y^2 = 3x$; **M'**$(2 \mid 3)$

Quadratische Ergänzung:

$y^2 - 6y + 9 - 9 - 3x + 15 = 0 \rightarrow (y - 3)^2 = 3x - 6 = 3(x - 2)$

Vergleich: $x_o = 2$; $y_o = 3$; $p = 1{,}5$

8.2 Rotation

Eine Rotation führt (im Allgemeinen) zum Auftreten eines gemischten Glieds "xy".

{Die Formeln für die Translation allein erlauben noch eine Auflösung einer quadratischen Gleichung "$y^2 + py + q = 0$" um Daten für eine Darstellung $y = y(x)$ zu erhalten. Jetzt ist dies nicht mehr möglich, es liegt eine implizite Funktion $F(x, y)$ vor.}

Drehung um φ (in Vektorschreibweise) $\mathbf{x_g} = \mathbf{D}\,\mathbf{x}$; $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$; $\{\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^T\}$

$\rightarrow$ Für die Koordinaten: $x = x_g \cos(\varphi) + y_g \sin(\varphi)$ und $y = -x_g \sin(\varphi) + y_g \cos(\varphi)$

Dies jeweils in die Koordinatengleichungen eingesetzt.

Ellipse el: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

Q: $x_g^2 [b^2 \cos^2(\varphi) + a^2 \sin^2(\varphi)] + y_g^2 [b^2 \sin^2(\varphi) + a^2 \cos^2(\varphi)]$
$+ x_g y_g [2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \cdot (b^2 - a^2)] - a^2 b^2 = 0$

Hyperbel hyp: $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$

Q: $x_g^2 [b^2 \cos^2(\varphi) - a^2 \sin^2(\varphi)] + y_g^2 [b^2 \sin^2(\varphi) - a^2 \cos^2(\varphi)]$
$+ x_g y_g [2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \cdot (b^2 + a^2)] - a^2 b^2 = 0$

Für einen **Kreis** sollte selbstverständlich eine Identität erhalten werden, weil eine Drehung nichts am Kreis ändert. (Ein einzelner Punkt wird gedreht, aber insgesamt bleibt die Koordinatengleichung bestehen.}
Es ist $a^2 = b^2 = r^2$. Damit sind die Koeffizienten zu x_g^2 und $y_g^2 = 1$ und der Koeffizient zu $x_g y_g = 0$.

Parabel par: $y^2 = 2px$

Q: $\sin^2(\varphi) x_g^2 + [-2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)] x_g y_g + \cos^2(\varphi) y_g^2 + [-2p \cos(\varphi)] x_g + [-2p \sin(\varphi)] y_g = 0$

Die **Umkehrung der Rotation**, also die Erzeugung der zu Q gehörenden Normalform, ist (prinzipiell) wieder durch Koeffizientenvergleich möglich.

! **HINWEIS**
Wie eine solche Aufgabe mit der "Hauptachsentransformation" durchgeführt wird, wird später im Zusammenhang mit der allgemeinen Quadrik Q gezeigt! Dort wir auch gezeigt, dass eine weitere Mehrdeutigkeit besteht, wenn nach einem "Drehwinkel" gefragt ist.

Gesucht ist die Normalform zu Q und der Winkel φ, um den Q gegenüber der Normalform gedreht ist.
{Trivial ist, dass mit φ auch jeder Winkel $\varphi + n \cdot 2\pi$ gilt.}

♦ 8.2.1 Übungsbeispiel Parabel.

Gegeben Q: $(3/4)x^2 - (\sqrt{3}/2)xy + (1/4)y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y = 0$

Q: $\sin^2(\varphi) x_g^2 + [-2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)] x_g y_g + \cos^2(\varphi) y_g^2 + [-2p \cos(\varphi)] x_g + [-2p \sin(\varphi)] y_g = 0$

Koeffizientenvergleich:

$\langle x^2 \rangle$: $\sin^2(\varphi) = 3/4 \rightarrow \sin(\varphi) = \sqrt{3}/2 \rightarrow \varphi = 60°$ {oder 120°}

$\langle y^2 \rangle$: $\cos^2(60°) = 1/4$ ✓

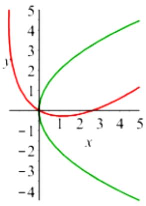
$\langle xy \rangle$: $-2 \sin(60°) \cos(60°) = -\sqrt{3}/2$ ✓

$\langle x \rangle$: $p = -2 / [-2 \cos(60°)] = 2$

$\langle y \rangle$: $-2p \sin(60°) = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}/2 = -2\sqrt{3}$ ✓

$\rightarrow$ Normalform par: $y^2 = 2px = 4x$

Um 60° gedrehte Parabel (rot)
und
Normallage dazu (grün)



Für den zweiten Winkel φ = 120° würde gelten:
$\langle x^2 \rangle$: 3/4 ✓; $\langle y^2 \rangle$: 1/4 ✓; aber $\langle xy \rangle$: + $\sqrt{3}$ /2 ✗
{und eines der Vorzeichen von $\langle x \rangle$ oder $\langle y \rangle$ ist falsch für p = ± 2}

♦ 8.2.2 Übungsbeispiel Ellipse.

Gegeben Q: $(37/4)\, x^2 - (21/2)\sqrt{3}\, xy + (79/4)\, y^2 - 100 = 0$

Q: $A\, x^2 + B\, x\, y + C\, y^2 + F = 0$

$A = b^2 \cos^2(\varphi) + a^2 \sin^2(\varphi)$; $C = b^2 \sin^2(\varphi) + a^2 \cos^2(\varphi)$

$B = 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \cdot (b^2 - a^2)$; $F = - a^2 b^2$

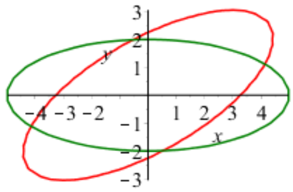
Koeffizientenvergleich:
Am einfachsten scheint ein Ansatz für die Summe A + C:
$A + C = b^2 [\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)] + a^2 [\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)] = a^2 + b^2$ (= 29)
$b^2 = - F / a^2 \rightarrow a^2 - F / a^2 = A + C \rightarrow a^4 - (A + C)\, a^2 - F = 0$
$a^4 - 29\, a^2 + 100 = 0 \rightarrow a^2 = 29/2 \pm [441 / 4]^{1/2} = \{25; 4\} \rightarrow b^2 = \{4; 25\}$
Die erste Lösung $\{a^2; b^2\} = \{25; 4\}$ passt zur üblichen Konvention, dass eine Ellipse mit der größeren Achse a in der x-Richtung angeordnet wird.
{Die zweite Lösung enthält die Vertauschung, die dann größere Achse b zeigt in y-Richtung.}
Es ist auch $A = \cos^2(\varphi)\, [b^2 - a^2] + a^2 \rightarrow \cos^2(\varphi) = [(37/4) - 25] / (- 21) = 3/4 \rightarrow \sin^2(\varphi) = 1/4$
Das gilt für φ = 30° - und (leider auch) 150°, 210°, 330°. {und + $n \cdot 2\pi$}
{Die Winkel φ > 180° führen zu keinen neuen Koordinatengleichungen, die Punkte sind dann am Ursprung gespiegelt.}
Vorzeichen von B:

φ = 30°: $\sin(\varphi) > 0$, $\cos(\varphi) > 0$; $\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) > 0$, $(b^2 - a^2) < 0$
damit B < 0

φ= 150°: $\sin(\varphi) > 0$, $\cos(\varphi) < 0$; $\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) < 0$, $(b^2 - a^2) < 0$
damit B > 0

Für φ = 30° folgt dasselbe Vorzeichen wie für Q der Aufgabenstellung.

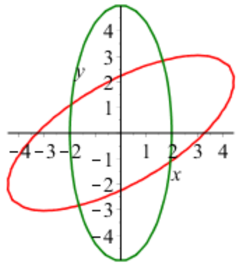
Normalform el: $4\, x^2 + 25\, y^2 = 100$
Um 30° gedrehte Ellipse (rot)
und
Normallage dazu (grün)



{Für φ = 150° ist die Ellipse an der y-Achse gespiegelt.}

Für die "unübliche" Anordnung $a^2 = 4$, $b^2 = 5$ liefert φ = 120° dasselbe Q.

Alternative Normalform
el: $25\, x^2 + 4\, y^2 = 100$
Um 120° gedrehte Ellipse (rot)
und
Normallage dazu (grün)



Beide Lösungen entsprechen einer Normalform. In beiden Fällen sind die Ellipsenachsen parallel zu den Achsen des Koordinatensystems. Durch die zusätzliche Forderung "a > b ist gewünscht" wird der übliche Fall davon ausgewählt. Der Lösungsweg über die Summe "A + C" führt schnell zur Normalform; falls der Drehwinkel φ gesucht ist, müssen weitere Koeffizienten untersucht werden.

8.3 Koeffizienten in der allgemeinen Quadrik

Alle möglichen Kegelschnitte lassen sich durch den allgemeinen Ausdruck
Q: $A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$ beschreiben.
Wenn wir uns auf die hier behandelten Fälle Ellipse, Hyperbel und Parabel beschränken, kann man aus den Koeffizienten A, B und C die Art des Kegelschnitts schnell ermitteln.
Im Zusammenhang mit dem Eigenwert-Problem, siehe Kapitel 9, werden die Spur und die Determinante einer Matrix noch einmal vorkommen. Diese Größen sind aber auch interessant, weil sie "Invarianten" sind. Eine Translation und/oder Drehung verändert diese nicht!

Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$ Spur(**M**) = A + C {Summe der Diagonal-Elemente}

det(**M**) = $A C - B^2 / 4$

Zuerst die *Werte für* jeweils die *Normalform*

Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ Spur(**M**) = $b^2 + a^2$ det(**M**) = $a^2 b^2$

Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}$ Spur(**M**) = $b^2 - a^2$ det(**M**) = $- a^2 b^2$

Parabel $y^2 = 2 p x$

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Spur(**M**) = 1 det(**M**) = 0

Unterscheidung	Spur(**M**)	det(**M**)
Ellipse	$\neq 0$	>0
Hyperbel	$\neq 0$	< 0
Parabel	= 1	= 0 {außerdem unmittelbar: nur y^2 oder x^2}

Einfluss einer Translation

Eine Translation, z.B. ell: $b^2 (x - x_o)^2 + a^2 (y - y_o)^2 = a^2 b^2$, ändert nichts an den quadratischen Termen, sondern fügt nur neue lineare Terme dazu und ändert das absolute Glied.
$\Rightarrow$ **M** bleibt gleich $\Rightarrow$ Das Unterscheidungs-Kriterium ist identisch.

Einfluss einer Rotation

Die Koeffizienten ändern sich und es entsteht ein neues gemischtes Glied "xy".
Wir werden aber sehen, dass sich Spur(**M**) und det(**M**) nicht ändern!
In den Herleitungen: Schreibtechnische Abkürzung: $\sin(\varphi) \to S$; $\cos(\varphi) \to K$

♦ *Ellipse*: $b^2 x^2 + a^2 y^2 \to Ax^2 + B x y + C y^2$

$A = b^2 \cos^2(\varphi) + a^2 \sin^2(\varphi)$; $B = 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \cdot (b^2 - a^2)$; $C = b^2 \sin^2(\varphi) + a^2 \cos^2(\varphi)$

Spur(**M**) $= b^2 K^2 + a^2 S^2 + b^2 S^2 + a^2 K^2 = b^2 + a^2$ ✓

det(**M**) $= \{b^2 K^2 + a^2 S^2)\}\{b^2 S^2 + a^2 K^2\}- S^2 K^2 (b^2 - a^2)^2$
$= b^4 S^2 K^2 + a^2 b^2 S^4 + a^2 b^2 K^4 + a^4 S^2 K^2 - b^4 S^2 K^2 + 2 a^2 b^2 S^2 K^2 - a^4 S^2 K^2$
$= a^2 b^2 \{S^4 + 2 S^2 K^2 + K^4\} = a^2 b^2 (S^2 + K^2)^2 = a^2 b^2$ ✓

♦ *Hyperbel*: $b^2 x^2 - a^2 y^2 \to Ax^2 + B x y + C y^2$

$A = b^2 \cos^2(\varphi) - a^2 \sin^2(\varphi)$; $B = 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \cdot (b^2 + a^2)$; $C = b^2 \sin^2(\varphi) - a^2 \cos^2(\varphi)$

Spur(**M**) $= b^2 K^2 - a^2 S^2 + b^2 S^2 - a^2 K^2 = b^2 - a^2$ ✓

det(**M**) $= \{b^2 K^2 - a^2 S^2)\}\{b^2 S^2 - a^2 K^2\}- S^2 K^2 (b^2 + a^2)^2$
$= b^4 S^2 K^2 - a^2 b^2 S^4 - a^2 b^2 K^4 + a^4 S^2 K^2 - b^4 S^2 K^2 - 2 a^2 b^2 S^2 K^2 - a^4 S^2 K^2$
$= a^2 b^2 \{-S^4 - 2 S^2 K^2 - K^4\} = - a^2 b^2 (S^2 + K^2)^2 = - a^2 b^2$ ✓

♦ *Parabel*: $y^2 \to Ax^2 + B x y + C y^2$

$A = \sin^2(\varphi)$; $B = - 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)$; $C = \cos^2(\varphi)$

Spur(**M**) $= S^2 + K^2 = 1$; det(**M**) $= S^2 K^2 - S^2 K^2 = 0$ ✓

$\Rightarrow$ **M** ändert sich, aber Spur(**M**) und det(**M**) bleiben gleich.