Kegelschnitte - Teil 11

11. Pol, Polare, Tangente

Es wird keine vollständige allgemeine Behandlung gegeben. Wichtig ist vor allem der Fall, dass der Pol außerhalb des Kegelschnitts liegt. Dann gilt: Die Polare geht durch die beiden Berührpunkte der Tangenten vom Pol aus.

Pol **Q**(x_o | y_o); Berührpunkt **B**(x_i | y_i)

Kreis
kr: $x^2 + y^2 = r^2$
pol: $x\,x_o + y\,y_o = r^2$
t: $x\,x_i + y\,y_i = r^2$

Ellipse (Normallage)
el: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$
pol: $b^2 x_o x + a^2 y_o y = a^2 b^2$
$y = -(x_o / y_o)(b^2 / a^2)\,x + (b^2 / y_o)$
t: $b^2 x_i x + a^2 y_i y = a^2 b^2$
$y = -(x_i / y_i)(b^2 / a^2)\,x + (b^2 / y_i)$

Hyperbel (Normallage)
hyp: $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$
pol: $b^2 x_o x - a^2 y_o y = a^2 b^2$
$y = (x_o / y_o)(b^2 / a^2)\,x - (b^2 / y_o)$
t: $b^2 x_i x - a^2 y_i y = a^2 b^2$
$y = (x_i / y_i)(b^2 / a^2)\,x - (b^2 / y_i)$

Hyperbel (Standardlage)
hyp: $y = c / x$
pol: $y = -(y_o / x_o)\,x + 2\,c / x_o$
t: $y = -(c / x_i^2)\,x + 2\,c / x_i$
$y = -(y_i / x_i)\,x + 2\,c / x_i$

Parabel (Normallage)
par: $y^2 = 2\,p\,x$
pol: $y_o\,y = p\,(x_o + x)$
$y = (p / y_o)\,x + p\,(x_o / y_o)$
t: $y_i\,y = p\,(x_i + x)$
$y = (p / y_i)\,x + p\,(x_i / y_i)$

Parabel (Standardlage)
par: $y = a\,x^2$
pol: $y = (2\,a\,x_o)\,x - y_o$
t: $y = (2\,a\,x_i)\,x - y_i$

Wenn der Pol bekannt ist und die Tangenten gesucht werden, gilt allgemein: Berührpunkte als Schnitt der Polaren mit dem Kegelschnitt. Tangenten dann als Geraden an einem Berührpunkt.

11.1 Polare - Herleitungen Ellipse (Normallage)

Normallage: el: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

Standard-Herleitung

Für eine Tangente am Berührpunkt gilt t_i: $b^2 x x_i + a^2 y y_i = a^2 b^2$
{Dies wird nicht nochmals hergeleitet.}
Laut Voraussetzung soll auch der Pol auf diesen Geraden t_i liegen.
$t_1 \rightarrow b^2 x_o x_1 + a^2 y_o y_1 = a^2 b^2$
$t_2 \rightarrow b^2 x_o x_2 + a^2 y_o y_2 = a^2 b^2$
Subtrahiert: $b^2 x_o (x_1 - x_2) + a^2 y_o (y_1 - y_2) = 0$
Umgestellt: $m = (y_1 - y_2) / (x_1 - x_2) = - (b^2 / a^2) (x_o / y_o)$
Dies ist auch die Steigung einer Geraden durch die beiden Berührpunkte.
Die Geradengleichung für die Polare ist damit $(y - y_1) = - (b^2 / a^2) (x_o / y_o) (x - x_1)$.
Umgestellt: $b^2 x_o x + a^2 y_o y = a^2 y_o y_1 + b^2 x_o x_1$
Die rechte Seite ist aus t_1 bekannt: $= a^2 b^2$
Damit Gleichung der Polaren zum Pol **Q**: pol: $b^2 x_o x + a^2 y_o y = a^2 b^2$ ✓

Alternative Herleitung

Ausgehend von der Polaren wird der Pol dazu gesucht.
Start: Die Polare hat die Geradengleichung $y = m x + k$
Die Berührpunkte folgen aus $b^2 x^2 + a^2 (m x + k)^2 = a^2 b^2$
Lösung: $x_{1,2} = \{ - k m a^2 \pm a [b^4 - b^2 k^2 + a^2 b^2 m^2]^{1/2} \} / \{a^2 m^2 + b^2\}$
$y_{1,2}$ dazu mit der Geradengleichung der Polaren
Die Tangenten gehen durch die Berührpunkte und den Pol **Q**$(x_o \mid y_o)$
$b^2 x_i x_o + a^2 y_i y_o = a^2 b^2$
Das System der zwei linearen Gleichungen wird gelöst.
Es folgt: $x_o = - a^2 m / k$ und $y_o = b^2 / k \rightarrow m = - (b^2 / a^2) (x_o / y_o)$ und $k = b^2 / y_o$
Eingesetzt in die Geradengleichung $\rightarrow b^2 x_o x + a^2 y_o y = a^2 b^2$ ✓
Als "schöne Merkformel" kann auch der Zusammenhang zwischen Pol und Polare angegeben werden: $y = m x + k \Leftrightarrow$ **Q**$(-a^2 m / k \mid b^2 / k)$
Hinweis: Weiteres zur "Merkformel" - siehe 11.9!

11.2 Polare - Herleitungen Hyperbel (Normallage)

Normallage: el: $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$
{Die Herleitungen sind weitgehend ähnlich den Herleitungen für die Ellipse.}

Standard-Herleitung

Für eine Tangente am Berührpunkt gilt t_i: $b^2 x x_i - a^2 y y_i = a^2 b^2$
Laut Voraussetzung soll auch der Pol auf diesen Geraden t_i liegen.
$t_1 \rightarrow b^2 x_o x_1 - a^2 y_o y_1 = a^2 b^2$
$t_2 \rightarrow b^2 x_o x_2 - a^2 y_o y_2 = a^2 b^2$
Subtrahiert: $b^2 x_o (x_1 - x_2) - a^2 y_o (y_1 - y_2) = 0$
Umgestellt: $m = (y_1 - y_2) / (x_1 - x_2) = (b^2 / a^2) (x_o / y_o)$
Dies ist auch die Steigung einer Geraden durch die beiden Berührpunkte.
Die Geradengleichung für die Polare ist damit $(y - y_1) = (b^2 / a^2) (x_o / y_o) (x - x_1)$.
Umgestellt: $b^2 x_o x - a^2 y_o y = - a^2 y_o y_1 + b^2 x_o x_1$
Die rechte Seite ist aus t_1 bekannt: $= a^2 b^2$
Damit Gleichung der Polaren zum Pol **Q**: pol: $b^2 x_o x - a^2 y_o y = a^2 b^2$ ✓

Alternative Herleitung

Start: Die Polare hat die Geradengleichung $y = m\,x + k$
Die Berührpunkte folgen aus $b^2 x^2 - a^2 (m\,x + k)^2 = a^2 b^2$
Lösung: $x_{1,2} = \{ - k\,m\,a^2 \pm a\,[b^4 + b^2 k^2 - a^2 b^2 m^2]^{1/2} \} / \{a^2 m^2 - b^2\}$
$y_{1,2}$ dazu mit der Geradengleichung der Polaren
Die Tangenten gehen durch die Berührpunkte und den Pol **Q**$(x_o \mid y_o)$
$b^2 x_i x_o - a^2 y_i y_o = a^2 b^2$
Das System der zwei linearen Gleichungen wird gelöst.
Es folgt: $x_o = - a^2 m / k$ und $y_o = - b^2 / k \rightarrow m = (b^2 / a^2)(x_o / y_o)$ und $k = - b^2 / y_o$
Eingesetzt in die Geradengleichung $\rightarrow b^2 x_o\,x - a^2 y_o\,y = a^2 b^2$ ✓
Als "schöne Merkformel" kann auch der Zusammenhang zwischen Pol und Polare angegeben werden: $y = m\,x + k \Leftrightarrow$ **Q**$(-a^2 m / k \mid - b^2 / k)$

11.3 Polare - Herleitungen Hyperbel (Standardlage)

Diese Herleitungen könnte man sich sparen, da die Standardlage durch eine Drehung aus der gleichseitigen Hyperbel entsteht. {Siehe Kapitel 6.6 Ü4}

Standard-Herleitung

Tangente am Berührpunkt t_i: $y = (- y_i / x_i)\,x + 2\,c / x_i$
Laut Voraussetzung soll auch der Pol auf diesen Geraden t_i liegen.
$t_1 \rightarrow y_o = (- y_1 / x_1)\,x_o + 2\,c / x_1$
$t_2 \rightarrow y_o = (- y_2 / x_2)\,x_o + 2\,c / x_2$
{Subtraktion ermöglicht keine einfache Auflösung nach $m = \Delta y / \Delta x$.}
Auflösung nach $x_i \rightarrow x_{1,2} = (- y_{1,2}\,x_o + 2\,c) / y_o$
$\rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = (x_o / y_o)(y_1 - y_2) = - (x_o / y_o)\,\Delta y$
$\rightarrow m = \Delta y / \Delta x = - (y_o / x_o) \rightarrow (y - y_i) = - (y_o / x_o)(x - x_i)$
$y = - (y_o / x_o)\,x + (y_o / x_o)\,x_i + y_i$
Die zwei letzten Terme aus $t_{1,2}$ ersetzt; $(y_o / x_o)\,x_i + y_i = 2\,c / x_o$
$\rightarrow$ pol: $y = - (y_o / x_o)\,x + 2\,c / x_o$ ✓

Modifizierte Standard-Herleitung

Weil der Berührpunkt auf der Hyperbel liegt, gilt $y_i = c / x_i$
$t_i \rightarrow y_o = (- c / x_i^2)\,x_o + 2\,c / x_i$
$x_i = (c / y_o) \pm [c^2 - c\,x_o\,y_o]^{1/2} / y_o$
Von den 4 möglichen Differenzen Δx, Δy sind 2 gleich 0.
Die anderen zwei: $\Delta x = \pm\, 2\,[c^2 - c\,x_o\,y_o]^{1/2} / y_o$ und $\Delta y = \pm \{ -2\,[c^2 - c\,x_o\,y_o]^{1/2} / x_o\}$
$\rightarrow m = - (y_o / x_o)$

"Kuriose" Standard-Herleitung

Tangentenbeziehungen wie bei der vorigen "Standard-Herleitung".
Jetzt aber eine Auflösung nach x_i und nach y_i.
Auflösung nach $x_i \rightarrow x_{1,2} = (- y_{1,2}\,x_o + 2\,c) / y_o$
$\rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = (x_o / y_o)(y_1 - y_2) = - (x_o / y_o)\,\Delta y$
Auflösung nach $y_i \rightarrow y_{1,2} = (- x_{1,2}\,y_o + 2\,c) / x_o$
$\rightarrow \Delta y = y_2 - y_1 = (y_o / x_o)(x_1 - x_2) = - (y_o / x_o)\,\Delta x$
Damit folgt $m = \Delta y / \Delta x = (y_o / x_o)^2 (\Delta x / \Delta y) \rightarrow m^2 = (y_o / x_o)^2$
Eine Lösung davon ist $m = - (y_o / x_o)$
Diese müsste bei dieser Herleitung ausgewählt werden - "weil sie passt" bzw. "weil sie zum gewünschten Resultat pol: $y = - (y_o / x_o)\,x + 2\,c / x_o$ führt".
Was die Lösung $m = + (y_o / x_o)$ bedeutet, wird in 11.6 gezeigt.

Alternative Herleitung

Start: Die Polare hat die Geradengleichung $y = m\,x + k$
Berührpunkte {Schnitt Polare mit Hyperbel $y = c / x$}: $m\,x + k = c/x$
Lösung: $x_{1,2} = \{ - k \pm [4\,c\,m + k^2]^{1/2} \} / \{2\,m\}$
$y_{1,2} = c / x_{1,2}$
Die Tangenten gehen durch die Berührpunkte und den Pol **Q**($x_o \mid y_o$)
$y_o = m\,x_o - m\,x_i + y_i$ mit $m = - (c / x_i^2)$
Das System der zwei linearen Gleichungen wird gelöst.
Es folgt: $x_o = 2\,c / k$ und $y_o = 4\,m\,c\,\{m\,x_o + k - [4\,c\,m + k^2]^{1/2}\} / \{k - [4\,c\,m + k^2]^{1/2}\}^2$
Aufgelöst $\rightarrow$ $m = -(y_o / x_o)$ und $k = 2\,c / x_o$
Polare: $y = - (y_o / x_o)\,x + 2\,c / x_o$ ✓
"Merkformel $y = m\,x + k \Leftrightarrow$ **Q**$(\,2\,c / k \mid - 2\,c\,m / k)$

11.4 Polare - Herleitungen Parabel (Normallage)

Normallage: par: $y^2 = 2\,p\,x$

Standard-Herleitung

Tangente $y_i\,y = p\,(x + x_i)$
Tangenten, die durch den Pol und den Berührpunkt gehen:
$y_i\,y_o = p\,(x_o + x_i)$
Differenz: $y_o\,(y_1 - y_2) = p\,(x_1 - x_2)$
Damit Steigung der Polaren $(y_1 - y_2) / (x_1 - x_2) = p / y_o = m$
Ansatz als Gerade: $(y - y_i) = m\,(x - x_i) = (p / y_o)\,(x - x_i)$
Umgeordnet: $y\,y_o = p\,x - p\,x_i + y_i\,y_o = p\,x - p\,x_i + p\,x_o + p\,x_i$
$\rightarrow$ pol: $y\,y_o = p\,(x + x_o)$ ✓

Alternative Herleitung

Die Polare hat die Gleichung $y = m\,x + k$
Berührpunkte {Schnitt Polare mit Parabel $y^2 = 2\,p\,x$}: $(m\,x + k)^2 = 2\,p\,x$
Lösung: $x_{1,2} = \{- (m\,k - p) \pm [p^2 - 2\,k\,m\,p]^{1/2}\} / m^2$
$y_{1,2}$ dazu mit der Geradengleichung der Polaren
Die Tangenten gehen durch die Berührpunkte und den Pol **Q**($x_o \mid y_o$)
$y_o = m\,x_o - m\,x_i + y_i$ mit $m = p / y_i$
$\{d/dx\,(y^2) = 2\,y \cdot dy/dx = 2\,p\}$
Das System der zwei linearen Gleichungen wird gelöst.
Es folgt: $x_o = k / m$ und $y_o = p / m$
Aufgelöst $\rightarrow$ $m = p / y_o$ und $k = (x_o\,(\,y_o)\,p$
Polare: $y = (p / y_o)\,x + (x_o / y_o)\,p$ ✓
"Merkformel $y = m\,x + k \Leftrightarrow$ **Q**$(\,k / m \mid p / m)$

11.5 Polare - Herleitungen Parabel (Standardlage)

Standardlage: par: $y = a\,x^2$

Weil die Standardlage einfach durch Achsenvertauschung aus der Normallage entsteht, ist mit $y^2 = 2\,p\,x \rightarrow y = a\,x^2$ $\{a = 1 / (2\,p)\}$:

$y = (p / y_o)\,x + p\,(x_o / y_o) \rightarrow x = [1 / (2\,a\,x_o)]\,y + y_o / (2\,a\,x_o) \rightarrow y = (2\,a\,x_o)\,x - y_o$

Standard-Herleitung

Tangente t: $y = (2\,a\,x_i)\,x - y_i$

Laut Voraussetzung soll auch der Pol auf diesen Geraden t_i liegen.

$t_1 \rightarrow y_o = (2\,a\,x_i)\,x_o - y_i$

$t_2 \rightarrow y_o = (2\,a\,x_i)\,x_o - y_i$

Subtrahiert: $(2\,a\,x_o)\,(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) = 0$

Umgestellt: $m = (y_1 - y_2) / (x_1 - x_2) = 2\,a\,x_o$

{Steigung einer Geraden durch die beiden Berührpunkte}

Geradengleichung für die Polare: $(y - y_i) = (2\,a\,x_o)\,(x - x_i)$

pol: $y = 2\,a\,x_o\,x - 2\,a\,x_o\,x_i + y_i = (2\,a\,x_o)\,x - y_o$ ✓

Alternative Herleitung

Die Polare hat die Gleichung $y = m\,x + k$

Berührpunkte {Schnitt Polare mit Parabel $y = a\,x^2$}: $a\,x^2 = (m\,x + k)$

Lösung $x_{1,2} = \{m \pm [m^2 + 4\,a\,k]^{1/2}\} / \{2\,a\}$

$y_{1,2}$ dazu mit der Geradengleichung der Polaren

Die Tangenten gehen durch die Berührpunkte und den Pol **Q**$(x_o \mid y_o)$

$y_o = 2\,a\,x_i\,x_o - y_i$

Das System der zwei linearen Gleichungen wird gelöst.

Es folgt: $x_o = m / (2\,a)$ und $y_o = -\,k$

$\rightarrow$ Polare: $y = (2\,a\,x_o)\,x - y_o$ ✓

"Merkformel $y = m\,x + k \Leftrightarrow$ **Q**$(\,m / (2\,a) \mid -\,k)$

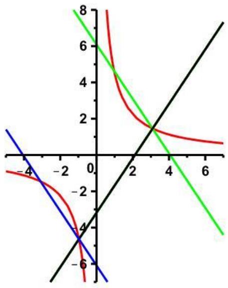
11.6 Anhang zu 11.3

Bei der "kuriosen" Herleitung für die Hyperbel in der Standardlage wurde für die Steigung der Polaren $m^2 = (y_o / x_o)^2$ erhalten.

- Die Wahl $m = -(y_o / x_o)$ führt dann zur richtigen Formel für die Polare zum Pol **Q**$(x_o \mid y_o)$ und die Polare geht durch zwei Berührpunkte $\mathbf{B}_{1,2}$.
  pol: $y = -(y_o / x_o)\, x + 2\, c / x_o$ (1)
- Im Fall $m = +(y_o / x_o)$ kann man das Zwischenergebnis der Ableitung
  "pol": $y = +(y_o / x_o)\, x - (y_o / x_o)\, x_i + y_i$ (2)
  nicht weiter vereinfachen.

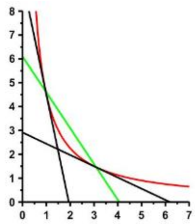
Diese Formel (2) ist unbrauchbar, weil man jetzt den Pol und einen Berührungspunkt kennen müsste. Wir können nur "rückwirkend" untersuchen, welche Gerade dann durch die Gleichung beschrieben wird, wenn wir einen Pol und einen Berührpunkt einsetzen.
Dazu anschaulich das Ergebnis mit dem Zahlenbeispiel aus Kapitel 6.6, Ü4
Pol liegt bei ca. **Q**(-2,83 | 4,24)

schwarz:	Rechnung mit (1)
grün:	Rechnung mit (2), eingesetzt $\mathbf{B}_1$
blau:	Rechnung mit (2), eingesetzt $\mathbf{B}_2$



Wie schon in der Formel (2) zu sehen, haben die grüne und blaue Polare das Negative der Steigung der richtigen (!) schwarzen Polaren zum Pol **Q**, gemäß Formel (1)

Die grüne Polare (durch $\mathbf{B}_1$ und $-\mathbf{B}_2$) hat den tatsächlichen Pol bei ca. **Q'**(1,48 | 2,22).
Wenn man diesen Pol **Q'** in die "richtige" Formel (1) einsetzt, folgt natürlich dieselbe grüne Polare.



schwarze Polare: $y \approx 1{,}50\, x - 3{,}18$ durch $\mathbf{B}_1$(3,09 | 1,46) und $\mathbf{B}_2$(-0,970 | -4,64)
grüne Polare: $y \approx -1{,}50\, x + 6{,}09$ durch $\mathbf{B}_1$ und $-\mathbf{B}_2$
{Die blaue Polare hat den tatsächlichen Pol **- Q'**}

	(1) mit Pol	(2) mit Pol und $\mathbf{B}_1$
Q	schwarz	grün
Q'	grün	schwarz

(1) liefert jeweils die richtige Zuordnung Polare zum Pol. (2) liefert jeweils die dem anderen Pol zugeordnete Polare.

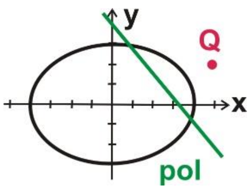
Formel (2) ist für die Berechnung "Polare zu einem Pol" **unbrauchbar!** Außerdem haben wir auch schon das Endergebnis - nämlich die Kenntnis von $\mathbf{B}_1$ - benötigt, um die Rechnung überhaupt durchführen zu können! **Die Herleitung 11.3. ist tatsächlich "kurios"!**

Erkennbar werden Symmetrien. "Es gibt einen anderen Pol **Q'**, der mit Spiegelpunkten zu den Berührpunkten verknüpft ist."

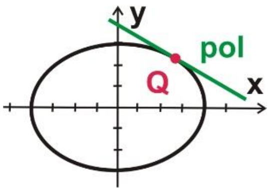
11.7 Innen liegender Pol

Es soll hier keine allgemeine Theorie des Zusammenhangs Pol ↔ Polare gegeben werden. Am Beispiel einer Ellipse wird eine geometrische Definition (z.B. "Wikipedia, Pol und Polare") verifiziert.

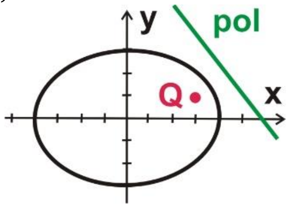
Anschaulicher Vergleich: Konkretes Beispiel a = 4, b = 3



$x_o = 5$; $y_o = 2$



$x_o = 8/3$; $y_o = \sqrt{5}$



$x_o = 3$; $y_o = 1$

- Pol außerhalb → Polare schneidet Ellipse
- Pol auf Ellipse → Polare ist Tangente
- Pol innerhalb → Polare liegt außerhalb der Ellipse

Für den *3. Fall* lautet die *geometrische Definition*:

1. Zeichne 2 Sekanten durch **Q**.
2. Bilde an den Schnittpunkten mit der Ellipse jeweils die Tangenten.
3. Die Schnittpunkte der Tangenten liefern einen Punkt $\mathbf{P_i}$
4. Die Polare geht durch $\mathbf{P_1}$ und $\mathbf{P_2}$.

Allgemeine Lösung

1. Sekante i: $y = m_i\, x - m_i\, x_o + y_o$
2. Die Ausdrücke für die Schnittpunkte Sekante/Ellipse sind schon ziemlich lang. z.B. x-Koordinate von Berührpunkt $\mathbf{B_1}$
   $x = a\,\{a\, m_1^2\, x_o + a\, m_1\, y_o + Z^{1/2}\} / \{a^2\, m_1^2 + b^2\}$
   mit $Z = b^2\,(a^2\, m_1^2 - m_1^2\, x_o^2 - 2\, m_1\, x_o\, y_o + b^2 - y_o^2)$
   {Ausdrücke für die Tangenten ebenfalls lang}
3. Die langen Ausdrücke für die Schnittpunkte vereinfachen sich (erheblich!)
   $\mathbf{P_i}([a^2\, m_i] / [m_i\, x_o + y_o] \mid b^2 / [m_i\, x_o + y_o])$
4. Die Polare ist die Gerade durch 2 Punkte.
   $y = [(a^2 - x\, x_o)\, b^2\,] / [a^2\, y_o]$ bzw. umgestellt: $a^2\, y\, y_o + b^2\, x\, x_o = a^2\, b^2$ ✓
   ➔ auch für einen Pol innerhalb der Ellipse gilt die übliche Gleichung der Polaren!

Für eventuell gewünschtes Nachvollziehen eine *Lösung mit Zahlenwerten*.

$a = 4$; $b = 3$; $x_o = 3$; $y_o = 1$; $m_1 = 2$; $m_2 = -1$

1. g_1: $y = 2\,x - 7$; g_2: $y = -\,x + 2$

2a. Schnittpunkte Gerade / Ellipse (Berührpunkte) für g1:
$\mathbf{B_1}(3{,}87 \mid 0{,}748)$; $\mathbf{B_2}(2{,}26 \mid -2{,}47)$
t_1: $y = 2{,}91\, x - 12{,}0$; t_2: $y = -0{,}515\, x + 3{,}64$

3a. $\mathbf{P_1}\,(4{,}57 \mid 1{,}29)$ - ungerundet $\mathbf{P_1}(32/7 \mid 9/7)$

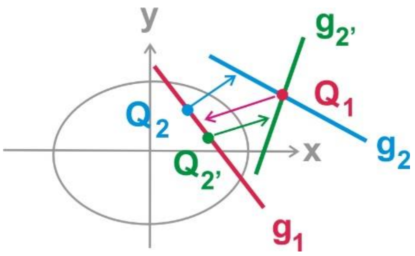
2b. Schnittpunkte Gerade / Ellipse (Berührpunkte) für g2:
$\mathbf{B_1}(3{,}48 \mid -1{,}48)$; $\mathbf{B_2}(-0{,}920 \mid 2{,}92)$
t_1: $y = -1{,}32\, x + 6{,}08$; t_2: $y = -0{,}177\, x - 3{,}08$

3b. $\mathbf{P_2}(8{,}00 \mid 4{,}50)$ - ungerundet $\mathbf{P_2}(8 \mid -9/2)$

4. Gerade durch $\mathbf{P_1}$ und $\mathbf{P_2}$: $y = -\,1{,}69\, x + 9{,}00$ - ungerundet $y = -27/16\, x + 9$
Vergleich: Polarengleichung direkt
$y = -\,(x_o / y_o)\,(b^2 / a^2) + (b^2 / y_o) = -\,3\cdot(9/16)\,x + (9/1)$ ✓

11.8 Symmetrieverhalten

Gegeben Pol $\mathbf{Q_1}$ und die Polare g_1 dazu. Irgendein Punkt auf dieser Polaren ist dann ein Pol $\mathbf{Q_2}$ zu einer Polaren g_2, die durch $\mathbf{Q_1}$ geht!



Wir zeigen das für eine Ellipse. In 11.7. wurde gezeigt, dass wir die allgemeinen Formeln stets anwenden können. {Ob einer der Pole innerhalb der Ellipse liegt, ist unwichtig.}

$\mathbf{Q_1}(x_o \mid y_o)$
Polare dazu: g_1: $b^2 x x_o + a^2 y y_o = a^2 b^2$.
$y = (a^2 b^2 - b^2 x x_o) / (a^2 y_o)$
Irgendein Punkt auf dieser Geraden g_1: $\mathbf{Q_2}(x_2 \mid [a^2 b^2 - b^2 x_2 x_o] / [a^2 y_o])$
Damit ist die Polare zu diesem Punkt (Pol):
g_2: $b^2 x_2 x + a^2 [a^2 b^2 - b^2 x_2 x_o] / [a^2 y_o] \cdot y = a^2 b^2$
$b^2 x_2 x + [a^2 b^2 - b^2 x_2 x_o] / y_o \cdot y = a^2 b^2$
Einsetzen $\mathbf{Q_1}$: $b^2 x_2 x_o + [a^2 b^2 - b^2 x_2 x_o] / y_o \cdot y_o = b^2 x_2 x_o + a^2 b^2 - b^2 x_2 x_o = a^2 b^2$
→ jede Gerade g_2 geht durch $\mathbf{Q_1}$ ✓

11.9 Zur "Merkformel"

Vorher angegebener *allgemeiner Zusammenhang* zwischen der Geradendarstellung "$y = m x + k$" der Polaren und dem Pol $\mathbf{Q}(x_o \mid y_o)$:

	x_o	y_o
Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$	$- a^2 m / k$	b^2 / k
Hyperbel (Normallage) $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$	$- a^2 m / k$	$- b^2 / k$
Hyperbel (Standardlage) $y = c / x$	$2 c / k$	$- 2 c m / k$
Parabel (Normallage) $y_2 = 2 p x$	k / m	p / m
Parabel (Standardlage) $y = a x_2$	$m / (2 a)$	$- k$

Spezialfall Parallele zur x-Achse $m = 0$, $k \neq 0$;

	x_o	y_o	
Ellipse	0	b^2 / k	Pol auf y-Achse
Hyperbel (Normallage)	0	$- b^2 / k$	Pol auf y-Achse
Hyperbel (Standardlage)	$2 c / k$	0	Pol auf x-Achse
Parabel (Normallage)	$\to \infty$	$\to \infty$	---
Parabel (Standardlage)	0	$- k$	Pol auf y-Achse

Wenn für die Parabel in der Normallage die Polare eine Parallele zur x-Achse ist, ist sie eine Parallele zur Symmetrieachse der Parabel. Mit der Überlegung, dass die Polare im Schnitt mit der Parabel die Berührungspunkte liefert, gibt es damit keine 2 Schnittpunkte. Formal ist die Erweiterung verständlich, dass ein Pol im Unendlichen auch den 2. Schnittpunkt im Unendlichen liefert. Fachsprache: "Die Pole liegen auf der Ferngeraden".
Rechnerisch: Polare: $y = (p / y_o) x + p (x_o / y_o)$; $(p / y_o) = 0 \Rightarrow m \to \infty$

Spezialfall Ursprungsgerade $m \neq 0, k = 0$,

	x_o	y_o	
Ellipse	$\to \infty$	$\to \infty$	---
Hyperbel (Normallage)	$\to \infty$	$\to \infty$	---
Hyperbel (Standardlage)	$\to \infty$	$\to \infty$	---
Parabel (Normallage)	0	p / m	Pol auf y-Achse
Parabel (Standardlage)	$m / (2a)$	0	Pol auf x-Achse

Ellipse, Hyperbel (Normallage):
Polare $y = -(x_o / y_o)(b^2 / a^2) x \pm (b^2 / y_o) \to b^2 / y_o = 0 \Rightarrow y_o \to \infty$
$-(x_o / y_o)(b^2 / a^2) = m \to x_o = a^2 y_o m / b^2 \Rightarrow x_o \to \infty$
Hyperbel (Standardlage):
Polare $y = -(y_o / x_o) x + 2c / x_o \to 2c / x_o = 0 \Rightarrow y_o \to \infty$
$-(y_o / x_o) = m \to x_o = -y_o / m \Rightarrow y_o \to \infty$

Spezialfall Parallele zur y-Achse $x = d$
{Diese Gerade kann nicht durch "y = m x + k" dargestellt werden, sondern nur mit der allgemeinen Form "Ax + By = C"}

	x_o	y_o	
Ellipse	a^2 / d	0	Pol auf x-Achse
Hyperbel (Normallage)	a^2 / d	0	Pol auf x-Achse
Hyperbel (Standardlage)	0	$2c / d$	Pol auf y-Achse
Parabel (Normallage)	$-d$	0	Pol auf x-Achse
Parabel (Standardlage)	$\to \infty$	$\to \infty$	---

Ellipse, Hyperbel (Normallage):
Allgemeine Form $A x + B y = C \to (A/C) x + (B/C) y = 1$ Achsenabschnittsform
Gerade (Polare): $x_o x / a^2 \pm y_o y / b^2 = 1$
Parallele "$x = d$" $\to B = 0 \to (1/d) x = 1$
Koeffizientenvergleich: $x_o / a^2 = 1 / d \Rightarrow x_o = a^2 / d$; $y_o / b^2 = 0 \Rightarrow y_o = 0$
Hyperbel (Standardlage):
Polare $y = -(y_o / x_o) x + 2c / x_o \to y_o / (2c) x + x_o / (2c) y = 1$
$y_o / (2c) = 1/d \Rightarrow y_o = 2c / d$; $x_o / (2c) = 0 \Rightarrow x_o = 0$
Parabel (Normallage):
Polare $y = (p / y_o) x + p (x_o / y_o) \to (-1/x_o) x + y_o/(p x_o) y = 1$
$-1/x_o = 1/d \Rightarrow x_o = -d$; $y_o/(p x_o) = 0 \Rightarrow y_o = 0$
Parabel (Standardlage):
$y = a x^2 \to y = (2a x_o) x - y_o \to (2a x_o / y_o) x - (1 / y_o) y = 1$
$1 / y_o = 0 \Rightarrow y_o \to \infty$; $(2a x_o / y_o) = 1/d \Rightarrow x_o = y_o / (2ad) \to \infty$

"Anwendungsbeispiel"
Hyperbel (Normallage): *Wo liegen die Pole, wenn die Leitlinien als Polare betrachtet werden?* Leitlinie: $x = \pm a^2 / e \to$ Parallelen zur y-Achse $\to x_o = a^2 / d = \pm e$; $y_o = 0$.
Pole sind die Brennpunkte **F**$(\pm e \mid 0)$
Hyperbel (Normallage): *Kann eine Asymptote eine Polare sein?* $\Rightarrow$ Da die Asymptote eine Ursprungsgerade ist, liegt kein Pol im Endlichen vor.
Zusatzfrage: *Kann ein Pol auf einer Asymptote liegen?* (Normallage) $\to$ **Q**$(x_o \mid \pm (b/a) x_o)$ in Polarengleichung $y = -(x_o / y_o)(b^2 / a^2) x \pm (b^2 / y_o)$ einsetzen $\to$ Für $+ (b/a)$ Steigung der Polaren $-(b/a)$, und umgekehrt. $\Rightarrow$ Die Polare ist jeweils eine Parallele zur anderen Asymptote.