Quadratische Gleichungen - Lösungen der Übungsaufgaben

1. Anwendung der Formeln

1) p-q-Formel: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3$;
   .... $\mathbf{x_1 = 4}$; $\mathbf{x_2 = -2}$.
2) p-q-Formel: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-8}$; weil hier die Wurzel aus einer negativen Zahl auftritt, hat die Gleichung
   .... **keine Lösung**.
3) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \pm 0$; es existiert die
   .... **Doppellösung** $\mathbf{x_1 = x_2 = 1}$.
4) Geordnet: $2x^2 - 12x + 18 = 0$; Division durch 2 für p-q-Formel:
   $x^2 - 6x + 9 = 0$; $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3 \pm 0$;
   .... **Doppellösung** $\mathbf{x_1 = x_2 = 3}$.
5) Geordnet: $3x^2 - 21x + 30 = 0$; Division durch 3;
   $x^2 - 7x + 10 = 0$; $x_{1,2} = 3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 - 10} = 3{,}5 \pm 1{,}5$;
   .... $\mathbf{x_1 = 5}$; $\mathbf{x_2 = 2}$.
6) Ausmultipliziert: $2x^2 + 4x + x^2 + 6x + 10 = 2x^2 + 4x$
   Geordnet: $x^2 + 6x + 10 = 0$
   $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10}$; Wurzel aus einer negativen Zahl, also
   .... **keine Lösung**.
7) Geordnet: $x^2 - 5x = 0$; dies ist ein einfach lösbarer Sonderfall!
   $x \cdot (x - 5) = 0$; 1. oder 2. Teil = 0!
   .... $\mathbf{x_1 = 0; x_2 = 5}$.
8) Ausmultipliziert mit der Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:
   $x^2 - 4 = 5$; und geordnet: $x^2 - 9 = 0$; wieder ein Sonderfall!
   $x^2 = 9$; x ist die Wurzel davon:
   .... $\mathbf{x_1 = 3; x_2 = -3}$.
9) Binomische Formel: $(a \pm b)2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
   damit ausmultipliziert: $10x^2 - 60x + 105 = 9x^2 - 60x + 100$
   geordnet: $x^2 + 5 = 0$; Sonderfall! $x^2 = -5$; es gibt dazu keine (reelle) Lösung.
   .... **keine Lösung**.

2. Mit symbolischen Konstanten

1) $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2} = -a \pm 3a$;
   .... $\mathbf{x_1 = 2a}$; $\mathbf{x_2 = -4a}$.

2) $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{5}{2}$; multipliziert mit 2 a x: $\frac{2ax \cdot x}{a} + \frac{2ax \cdot a}{x} = \frac{2ax \cdot 5}{2}$;
   gekürzt: $2x^2 + 2a^2 = 5ax$;
   geordnet für p-q-Formel: $x^2 - \frac{5}{2}ax + a^2 = 0$;
   $x_{1,2} = \frac{5}{4}a \pm \sqrt{\frac{25}{16}a^2 - a^2} = \frac{5}{4}a \pm \frac{3}{4}a$;
   .... $\mathbf{x_1 = 2a}$; $\mathbf{x_2 = 0{,}5a}$

3) $x^2 + (a^2 - a^3) \cdot x - a^5 = 0$;

Vorarbeit: $(a^2 + a^3)^2 = a^4 + 2 a^5 + a^6$ und $(a^2 - a^3)^2 = a^4 - 2 a^5 + a^6$

$$x_{1,2} = -\frac{a^2 - a^3}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4 - 2a^5 + a^6}{4} + a^5}$$

Ausdruck unter der Wurzel: $(a^4 - 2 a^5 + a^6 + 4 a^5) / 4 = (a^4 + 2 a^5 + a^6) / 4$.

Durch Vergleich sieht man, dass dies $(a^2 + a^3)^2 / 2$ ist; damit

$x_{1,2} = \frac{-a^2 + a^3}{2} \pm \frac{a^2 + a^3}{2}$; $x_1 = - 2 a^2 / 2 = - a^2$; $x_2 = 2 a^3 / 2 = a^3$;

.... $\mathbf{x_1 = - a^2; x_2 = a^3}$

4) $\frac{x+a}{a^2} = \frac{4a^2 - 1}{x-a}$; Umordnen: $(x + a) \cdot (x - a) = a^2 \cdot (4 a^2 - 1)$;

Ausmultiplizieren: $x^2 - a^2 = 4 a^4 - a^2$;

Umordnen mit Kürzen von $(- a^2)$: $x^2 - 4 a^4 = 0$; Sonderfall! $x_{1,2} = \pm \sqrt{4a^4} = 2 a^2$;

.... $\mathbf{x_1 = 2 a^2; x_2 = - 2 a^2}$.

3. Mit Text in der Aufgabenstellung

1) $a^2 + b^2 = 13$ und $a = b + 5$

$b = a - 5$ in die erste Gleichung eingesetzt: $a^2 + (a - 5)^2 = a^2 + a^2 - 10 a + 25 = 13$

geordnet nach Potenzen von a: $2 a^2 - 10 a + 12 = 0$

dividiert durch 2 für die p-q-Formel: $a^2 - 5 a + 6 = 0$

Lösung: $a_{1,2} = + 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 6} = 2{,}5 \pm 0{,}5$; $a_1 = 3$ und $a_2 = 2$

b_1 und b_2 sind dann jeweils um 5 kleiner.

damit die 1. Lösung: .... $\mathbf{a_1 = 3; b_1 = -2}$

und die 2.Lösung: .... $\mathbf{a_2 = 2; b_2 = -3}$.

2) Die unbekannte Zahl ist x; dann gilt $x \cdot 2 \cdot (x + 1) + (x + 2)^2 = 244$.

Ausmultipliziert: $2 x^2 + 2 x + x^2 + 4 x + 4 = 3 x^2 + 6 x + 4 = 244$;

Geordnet: $3 x^2 + 6 x -240 = 0$; dividiert durch 3 für p-q-Formel: $x^2 + 2 x - 80 = 0$;

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 80} = -1 \pm 9$; $x_1 = 8$; $x_2 = -10$ ist nicht positiv.

Die Lösung für x ist daher: .... $\mathbf{x = 8}$

3) $L \cdot B = 21$ und $2 L + 2 B = 20$

$B = (20 - 2 L) / 2 = 10 - L$ eingesetzt: $L \cdot (10 - L) = 10 L - L^2 = 21$

geordnet und p-q-Formel: $L^2 - 10 L + 21 = 0$; $L_{1,2} = + 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2$;

$L_1= 7$; $L_2 =3$

Lösung mit L_1: .... $\mathbf{L = 7; B = 3}$

Die zweite Lösung verwendet L_2; rechnerisch ist dann L = 3; B = 7. Das ist natürlich auch richtig, weil damit die Fläche und der Umfang stimmen; "gefühlsmäßig" erwarten wir, dass die Länge größer als die Breite ist, und geben daher der 1. Lösung den Vorzug.

4) (1) $a = 2b - 2$; (2) $(a + b)^2 = 49 = a^2 + 2ab + b^2$;
(1) in (2) eingesetzt: $(2b - 2)^2 + 2b \cdot (2b - 2) + b^2 = 49$;
Ausmultipliziert: $4b^2 - 8b + 4 + 4b^2 - 4b + b^2 - 49 = 0$;
Geordnet: $9b^2 - 12b - 45 = 0$; dividiert durch 9: $b^2 - \frac{4}{3}b - 5 = 0$;
$b_{1,2} = \frac{4}{6} \pm \sqrt{\frac{16}{36} - (-5)} = \frac{4}{6} \pm \sqrt{\frac{16 + 180}{36}} = \frac{4}{6} \pm \frac{14}{6}$; $b_1 = 3$;
die zweite Lösung $b_2 = \frac{-10}{6}$ liefert keine positive ganze Zahl, wie in der Aufgabenstellung verlangt. $a = 2 \cdot 3 - 2 = 4$. .... **a = 4; b = 3**.

4. "Chemische" Rechnungen

1) $0{,}05 \cdot (2 - x) \cdot (3 - x) = 0{,}05 \cdot (6 - 3x - 2x + x^2) = 0{,}05 \cdot (6 - 5x + x^2)$
$= 0{,}3 - 0{,}25x + 0{,}05x^2 = x$
geordnet: $0{,}05x^2 - 1{,}25x + 0{,}3 = 0$;
Division durch 0,05 für die p-q-Formel: $x^2 - 25x + 6 = 0$
$x_{1,2} = 12{,}5 \pm \sqrt{156{,}25 - 6} = 12{,}5 \pm 12{,}2577$
$x_1 = 0{,}24235 \approx 0{,}24$
$x_2 = 24{,}7565$; (dies ist chemisch nicht möglich, weil dann $(2 - x)$ und $(3 - x)$ nicht mehr positiv sind.)
.... $x \approx$ **0,24**

2) In symbolischer Form: $K \cdot (c - x) = Kc - Kx = x^2$;
geordnet: $x^2 + Kx - Kc = 0$; p-q-Formel: $x_{1,2} = -\frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} + Kc}$
mit Zahlenwerten: $x_{1,2} = -2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 + 7{,}5} = -2{,}5 \pm 3{,}708099$;
$x_1 = 1{,}208099 \approx 1{,}21$
$x_2 = -6{,}208099$ (der negative Wert ist aus chemischen Gründen nicht möglich.)
.... $x \approx$ **1,21**

3) In symbolischer Form: $K - \alpha K = \alpha^2 c$;
geordnet: $\alpha^2 c + \alpha K - K = 0$;
p-q-Formel: $\alpha^2 + (K / c)\alpha - K / c = 0$ und $\alpha_{1,2} = \frac{-K}{2c} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4c^2} + \frac{K}{c}}$
allgemeine Formel: $\alpha_{1,2} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - 4c \cdot (-K)}}{2c} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 + 4Kc}}{2c}$
Zahlenwerte:
p-q-Formel: $-0{,}018 \pm \sqrt{0{,}000324 + 0{,}036} = -0{,}018 \pm 0{,}190588$;
$\alpha_1 = 0{,}17259 \approx 0{,}173$;
$\alpha_2 = -0{,}20859$ (der negative Wert ist aus chemischen Gründen nicht möglich.)
allgemeine Formel: $(-1{,}8 \cdot 10^{-5} \pm \sqrt{3{,}24 \cdot 10^{-10} + 3{,}6 \cdot 10^{-8}}) / 10^{-3} =$
$(-1{,}8 \cdot 10^{-5} \pm \sqrt{3{,}24 \cdot 10^{-10} + 3{,}6 \cdot 10^{-8}}) / 10^{-3} =$
$(-1{,}8 \cdot 10^{-5} \pm 1{,}9059 \cdot 10^{-4}) / 10^{-3}$;
$\alpha_1 = 0{,}17259$; $\alpha_2 = -0{,}20859$
.... $\alpha \approx$ **0,173**