Quadratische Funktion

1. Übliche Formen

1) Allgemeine Form: **$y = f(x) = a x^2 + b x + c$**
   a, b, c Konstanten
   Grundlegender Fall a = 1, b = 0, c = 0, also $y = x^2$: "Normalparabel"
   Vorteil: Keine Brüche für die Koeffizienten - in der Lösungsformel der Gleichung y = 0.
2) Normalform: **$y = x^2 + p x + q$**
   Nur wichtig für die Lösung der Quadratischen Gleichung y = 0!
   p, q Konstanten (p = b/a; q = c/a)
   (Teilweise wird auch die "Allgemeine Form" Normalform genannt.)
   Vorteil: Für die Meisten leichter zu merkende Lösungsformel der Gleichung y = 0.
3) Linearfaktoren-Form: **$y = a (x - x_1) (x - x_2)$**
   a Konstante, x_1 und x_2 sind die Nullstellen von f(x) - d.h. Schnittpunkte mit der x-Achse.
   Vorteil: "Auf einen Blick'" sind die beiden Nullstellen erkennbar.
4) Scheitelpunkts-Form: **$y = a (x - x_S)^2 + y_S$**
   a Konstante, Scheitelpunkt S(x_S | y_S)
   Vorteil: "Auf einen Blick" ist der Scheitel erkennbar.

2. Mögliche Kurvenformen

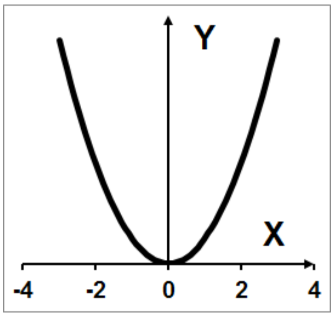
In der allgemeinen Form, der Normalform und der Linearfaktoren-Form ist der Kurvenverlauf nicht direkt ablesbar. Die Scheitelpunkts-Form ist eng mit der grafischen Darstellung verknüpft. In dieser Form sind eine Stauchung bzw. Dehnung, die Richtung der Öffnung der Parabel und Verschiebungen auf der x- und y-Achse direkt ablesbar.

Ausgangspunkt ist die sog. **Normalparabel**

$$y = x^2$$

Definitionsmenge sind alle reellen Zahlen.
Wertemenge sind die positiven reellen Zahlen.

(Prinzipiell sind auch komplexe Zahlen als Definitions- und Wertemenge möglich.)

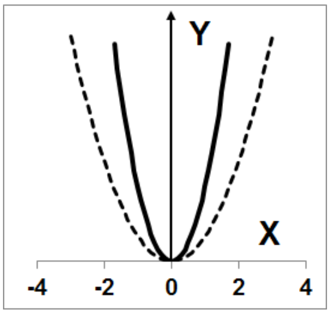


Im Folgenden: Jeweils "-----" Normalparabel zum Vergleich.

Ein Vorfaktor **a** bewirkt eine **Stauchung** oder **Dehnung**.
|a| > 1: Stauchung
|a| < 1: Dehnung
Das Vorzeichen bestimmt die **Öffnung**:
a>0: nach oben offen
a<0: nach unten offen

$$\mathbf{y = a x^2}$$

Beispiel: $y = 3 x^2$



Der tiefste Punkt bei einer nach oben offenen bzw. der höchste Punkt einer nach unten offenen Parabel heißt **Scheitel**. Für eine Funktion $y = a x^2$ hat der Scheitel die Koordinaten S(0 | 0).

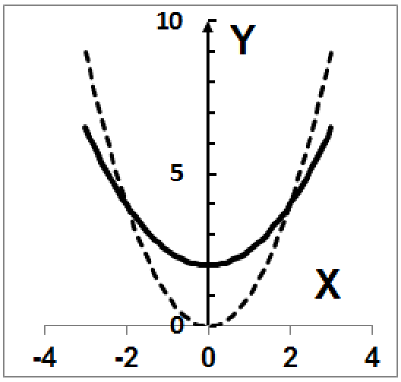
Eine **Verschiebung** in der **y-Richtung** ist durch ein konstantes Glied möglich.

$$\mathbf{y = a\,x^2 + const.}$$

Beispiel: $y = 0{,}5\,x^2 + 2$

Damit ist die ganze Parabel um 2 Einheiten auf der y-Achse nach oben geschoben. Der neue Scheitel liegt bei S(0 | 2). Daher ist es sinnvoll, anstelle von c direkt die y-Koordinate des Scheitels in der Formel einzusetzen.

$$\mathbf{y = a\,x^2 + y_S}$$



Aus dem Vorzeichen von y_S ist direkt ablesbar, ob der Scheitel jetzt oberhalb und unterhalb der x-Achse liegt; der Betrag bestimmt, um wie viel der Scheitel verschoben ist.

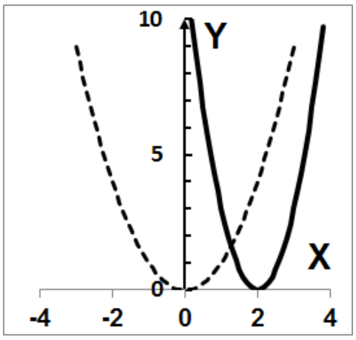
Eine **Verschiebung** der Parabel in der **x-Richtung** ist möglich, wenn anstelle von "x" ein neuer Wert "x - const." eingesetzt wird.

$$\mathbf{y = a\,(x - const.)^2}$$

Beispiel: $y = 3(x - 2)^2$

Damit liegt der neue Scheitel bei S(2 | 0). Auch hier ist es sinnvoll, dies direkt in der Formel zu zeigen.

$$\mathbf{y = a\,(x - x_S)^2}$$



Ein **positiver Wert von x_S** bedeutet eine **Verschiebung** des Scheitels **nach rechts**. (Vorzeichen "-" in der Formel beachten!)

Wenn alle drei möglichen Änderungen der Normalparabel berücksichtigt werden, entsteht die als "Scheitelpunkts-Form" angegebene Formel.

> Die **Lage des Scheitelpunkts** ist in der **Scheitelpunkts-Form** direkt ablesbar. Für Fragen zum Aussehen des Graphen ist diese Form also vorteilhaft.
>
> Für die **Suche nach Nullstellen** ist aber die **allgemeine Form** oder die **Normalform** besser geeignet. Dafür existieren schon fertige Lösungsformeln!

Selbstverständlich lassen sich die einzelnen Formen ineinander umrechnen. Und ebenso selbstverständlich gibt es fertige Lösungsformeln, mit denen aus den Konstanten der allgemeinen Form die Lage des Scheitelpunkts berechnet werden kann.

a bedeutet in allen vier angegebenen Formeln dasselbe! (Also Dehnung/Stauchung verglichen mit der Normalparabel und Öffnung nach oben oder unten) Dabei ist **a** $\neq 0$ vorausgesetzt. (In der allgemeinen Form wäre das keine quadratische, sondern eine lineare Funktion! In den anderen drei Formen ist dies eine illegale Operation bzw. liefert dies ein sinnloses Ergebnis.)

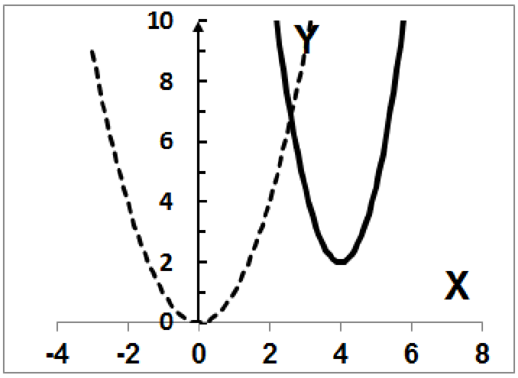
Aus **b** $\neq 0$ in der allgemeinen Form sieht man, dass eine Verschiebung des Scheitels in der x-Richtung vorliegt. Die Funktion ist dann nicht mehr symmetrisch zur y-Achse. **b** hängt von x_S ab, ist aber nicht gleich x_S!

c kann nicht direkt geometrisch interpretiert werden. In **c** kommen beide Koordinaten x_S und y_S vor (siehe Übungen).

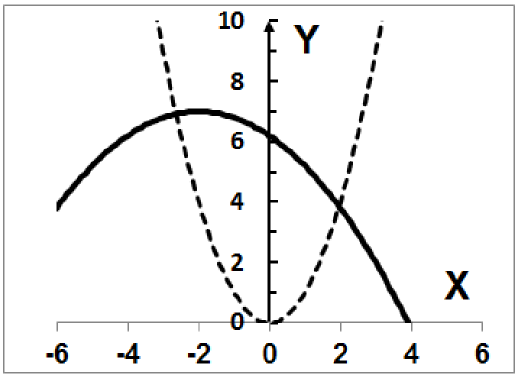
3. Übungsbeispiel zum Verständnis

Welche Aussagen zur den Konstanten in den Gleichungen, zu den Nullstellen und zur Lage des Scheitels sind aus folgenden Kurven ohne weitere Rechnungen möglich? (Zum Vergleich "---" Normalparabel)

A



B



Zuerst selbst versuchen, dann erst Lösung nachlesen!

A

Die Parabel ist nach oben offen, also ist **a** positiv. Gegenüber der Normalparabel ist die Kurve gestaucht, also ist **a** < 1. Die Lage des **Scheitel**s ist direkt ablesbar. 4 für die x-Koordinate, 2 für die y-Koordinate, also S(4 | 2). **b** und **c** der allgemeinen Form könnten dann daraus nur mit einer weiteren Rechnung bestimmt werden. Die Kurve schneidet die x-Achse nie. Also liegen keine reellen Nullstellen vor.

B

Die Parabel ist nach unten offen, also ist **a** negativ. Gegenüber der Normalparabel ist die Kurve gedehnt, also ist **a** > 1. Die Lage des **Scheitel**s ist direkt ablesbar. -2 für die x-Koordinate, 7 für die y-Koordinate, also S(-2 | 7). **b** und **c** der allgemeinen Form könnten dann daraus nur mit einer weiteren Rechnung bestimmt werden. Die Kurve schneidet die x-Achse zweimal. (Das ist offenkundig aus der Symmetrie der Kurve erkennbar, auch wenn die linke Nullstelle im gezeichneten Ausschnitte nicht mehr zu sehen ist.) Also liegen zwei reellen Nullstellen vor. Die Werte könnte man aus der allgemeinen Lösungsformel bestimmen, oder durch Formeln, die die Nullstellen mit dem Scheitel verknüpfen (siehe Übungen!)

4. Lösung der quadratischen Gleichung f(x) = 0 in der Allgemeinen und Normalform

f(x) = 0 hat allgemein zwei Lösung x_1 und x_2.

1. $\mathbf{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ 2. $\mathbf{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$

Den Ausdruck unter der Wurzel $D = b^2 - 4ac$ bzw. $D = p^2/4 - q$ nennt man auch "Diskriminante".

D > 0: Zwei reelle Lösungen (Nullstellen) existieren

D = 0: Eine reelle Doppel-Lösung.

D < 0: Keine reelle Lösung.

5. Scheitelpunktsform und Allgemeine Form

Es gilt der Zusammenhang $\mathbf{x_S = -\frac{b}{2a}}$ und $\mathbf{y_S = \frac{4ac - b^2}{4a}}$ oder $\mathbf{y_S = c - \frac{b^2}{4\,a}}$

Zum Zusammenhang zwischen Scheitel und Nullstellen: siehe Übungen!

6. Scheitel aus der Allgemeinen Form (Herleitung)

$y = a\,(x - x_S)^2 + y_S = a\,x^2 - 2\,a\,x\,x_S + x_S^2 + y_S$

Vergleich: $a\,x^2 \quad + x \cdot \{ -2\,a\,x_S \} \quad + \{ a\,x_S^2 + y_S \}$

$\qquad\qquad a\,x^2 \quad + x \cdot \quad b \quad + \quad c$

Koeffizientenvergleich:

$b = -2\,a\,x_S \Rightarrow \mathbf{x_S = -b / (2\,a)}$

$c = a\,x_S^2 + y_S \Rightarrow \mathbf{y_S} = c - a\,x_S^2 = c - a\,b^2 / (4\,a^2) \quad = \mathbf{c - b^2 / (4\,a)}$

(oder mit gemeinsamem Nenner) $\quad \mathbf{= (4\,a\,c - b^2) / (4\,a)}$

Eine Alternative benutzt die Methoden der Differentialrechnung zur Bestimmung von x_S.

Die Steigung am Scheitelpunkt ist 0. (Der Scheitelpunkt ist ein "Extremum", d.h. Minimum oder Maximum.)

Für $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ ist die Steigung $df/dx = 2\,a\,x + b$.

Damit gilt am Scheitelpunkt mit der Koordinate $x = x_S$: $2\,a\,x_S + b = 0$ und $x_S = -b / (2\,a)$.

y_S folgt durch Einsetzen von x_S in f(x).

$y_S = a\,b^2 / (4\,a^2) + b\,(-b) / (2\,a) + c = b^2 / (4\,a) - 2\,b^2 / (4\,a) + c = -b^2 / (4\,a) + c$.

7. Quadratische Ergänzung

Ein "Trick", um mit der binomischen Formel Ausdrücke zu vereinfachen. Das Verfahren kann auch benutzt werden, um die Scheitelpunktsform aus der Allgemeinen Form herzuleiten. (Die Methode unter 6. geht aber viel einfacher! Trotzdem: Dieses Verfahren wurde benutzt, um die angegebenen "fertigen" Lösungsformeln der quadratischen Gleichung zu erhalten!)

Zuerst allgemein:

Ziel ist, einen Term der **Form $(a \pm b)^2$** zu erzeugen.

(Damit wird dann eine nachfolgende Rechnung einfacher.)

Gegeben sei: $x^2 + k\,x$.

Als "quadratische Ergänzung" wird das **Quadrat des halben Koeffizienten des linearen Glieds (x)** dazu gefügt, also $(k/2)^2$. (Dieses wird hinterher wieder abgezogen!)

Es entsteht $\underline{x^2 + k\,x + \mathbf{(k/2)^2}} - \mathbf{(k/2)^2} = \underline{x^2 + 2 \cdot (k/2)\,x + (k/2)^2} - (k/2)^2 = \underline{\{x + (k/2)\}^2} - (k/2)^2$.

Anwendung auf die Allgemeine Form - Scheitelpunktsform erzeugt:

$y = a\,x^2 + b\,x + c$	Für das Verfahren soll der Vorfaktor von x^2 1 sein, also wird ein Teil durch a dividiert. (Und natürlich vor diesem Teil wieder mit a multipliziert.)
$y = a \cdot \{ x^2 + (b/a)\,x \} + c$	Der Teil in der Klammer {...} wird "quadratisch ergänzt. Halber Vorfaktor von $x = b / (2\,a)$. Mit dem Quadrat davon ergänzt und diese Ergänzung hinterher in der Gesamtgleichung wieder abgezogen: Dabei auf a vor {...} achten!
$y = a \cdot \{ x^2 + (b/a)\,x + \mathbf{b^2 / (4\,a^2)} \} + c \mathbf{- a\,b^2 / (4\,a^2)}$	Innerhalb der Klammer {...} steht der binomische Ausdruck $\{ x + b / (2\,a) \}^2$.
$y = a \cdot \{ x + b / (2\,a) \}^2 \quad + c - b^2 / (4\,a)$	Im letzten Ausdruck kann durch a gekürzt werden: $a\,b^2 / (4\,a^2) = b^2 / (4\,a)$.
$y = a \cdot \quad (x - x_S)^2 \quad + \quad y_S$	Vergleich: Scheitelpunktsform
$\mathbf{x_S = -b / (2\,a)}$ und $\mathbf{y_S = c - b^2 / (4\,a)}$.	Aus dem Vergleich ablesbar

<u>Herleitung der "fertigen Lösungsformel" über die quadratische Ergänzung:</u>

Vorher haben wir hergeleitet:

Aus $y = a x^2 + b x + c$ entsteht $y = a \cdot \{ x + b / (2 a) \}^2 + c - b^2 / (4 a)$.

Als Gleichung y = 0 zur Suche der Nullstellen ist das: $a \cdot \{ x + b / (2 a) \}^2 + c - b^2 / (4 a) = 0$.

Umgestellt (Vorzeichen beachten) und durch a dividiert:

$\{ x + b / (2 a) \}^2 = - (c/a) + b^2 / (4 a^2) = (- 4 a c + b^2) / (4 a^2)$

Damit ist $x + b / (2 a) = \pm$ "Wurzel aus der rechten Seite".
Insgesamt haben wir damit die angegebene "fertige Endformel"!

$$\mathbf{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

<u>8. Formeln von Vieta (1540 - 1603)</u>

Eine interessanter Zusammenhang zwischen den Nullstellen (x_1 und x_2) und der Normalform!

$\mathbf{p = - (x_1 + x_2)}$ und $\mathbf{q = x_1 \cdot x_2}$.

Die Formeln sind einzusehen durch Vergleich der Normalform und der Linearfaktoren-Form:

$y = a (x - x_1) (x - x_2)$ hat dieselben Nullstellen wie $(x - x_1) (x - x_2)$!
$(x - x_1) (x - x_2) = x^2 - x x_1 - x x_2 + x_1 x_2 = 0$
$x^2 \quad - (x_1 + x_2) x \quad + x_1 x_2 = 0$
$x^2 \quad + p x \quad + q = 0$

<u>Anwendung</u>(?): Eventuell kann man durch "Hinsehen" die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung erkennen. Man kann so schnell "Aufgaben erfinden".

$x^2 - 4 x + 3 = 0$. $\Rightarrow$ "Hinsehen" $\Rightarrow 3 \cdot 1 = 3$ und $3 + 1 = 4 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 1; x_2 = 3}$.
$x^2 - 5 x - 24 = 0$. $\Rightarrow$ Bekannt sei eine Nullstelle $x_1 = 8$; dann $\mathbf{x_2} = -24/8 = \mathbf{-3}$. Kontrolle: $-(8 + (-3)) = -5$.
$x_1 = -5$; $x_2 = 2 \Rightarrow$ Die "Aufgabe dazu": $p = - (-5+ 2) = 3$; $q = -10 \Rightarrow \mathbf{x^2 + 3 x - 10 = 0}$.

<u>9. Für welchen Aufgabentyp ist welche Form am besten geeignet?</u>

- *Normalform*: Sinnvoll für die Quadratische <u>Gleichung</u> f(x) = 0.
- *Linearfaktoren-Form*: Die Nullstellen sind sofort abzulesen.
- *Scheitelpunkts-Form*: Der Scheitel ist sofort abzulesen. Sinnvoll, wenn in der Aufgabe nach Änderung des Scheitels gefragt ist, z.B. "der Scheitel soll um 2 nach rechts verschoben werden".
- *Allgemeine Form*: Das ist eben die allgemeine Form. Weitere Vorteile gibt es nicht!
- *Lösung der Quadratischen Gleichung f(x) = 0*: Welche Lösungsformel man lieber verwendet, die für die Allgemeine Form oder die für die Normalform, ist eine Frage der persönlichen Vorliebe!

10. Nachtrag: Stimmt das auch mit komplexen Nullstellen?

("Für angehende Experten")

Von Interesse ist hier nur der Fall, dass die **Nullstellen komplex** sind! Eine noch allgemeinere Diskussion des Falls, dass auch die Koeffizienten komplexe Zahlen sind, führt zu weit!

(Eine Allgemeine Form ist leicht in die Normalform umzurechnen, daher Start mit dieser.)

$f(x) = y = x^2 + p\,x + q \Rightarrow \mathbf{y = x^2 - 6\,x + 13}$

1. Nullstellen: $\mathbf{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$ $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 13} = 3 \pm 2\,i.$

2. Stimmen die Vieta-Formeln?

$\mathbf{p = -(x_1 + x_2)} = -(3 + 2\,i + 3 - 2\,i) = -6$ ☑

$\mathbf{q = x_1 \cdot x_2} = (3 + 2\,i)(3 - 2\,i) = 9 - 4\,i^2 = 9 + 4 = 13$ ☑

p und q sind wieder reell, wie in der Ausgangsgleichung.

3. Koordinaten des Scheitels?

Hier <u>müssen</u> reelle Zahlen vorkommen! Es ist möglich, dass eine Parabel zwar nicht die x-Achse schneidet, also keine reellen Nullstellen vorliegen. Einen höchsten oder tiefsten Punkt im Reellen muss sie aber auf jeden Fall besitzen!

Einsetzen in $\mathbf{S(-p/2 \mid q - p^2/4)}$: $x_S = 3$; $y_S = 13 - 9 = 4 \Rightarrow \mathbf{S(3 \mid 4)}$

4. Stimmt die Berechnung der Nullstellen aus dem Scheitel?

Einsetzen x_S und y_S: $x_{1,2} = \mathbf{x_S} \pm \sqrt{-\frac{\mathbf{y_S}}{\mathbf{a}}} = 3 \pm \sqrt{-4/1} = 3 \pm 2\,i.$ ☑

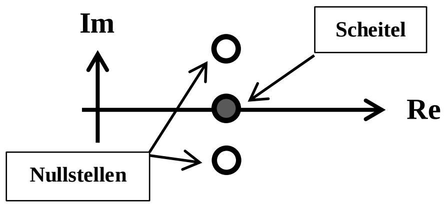
Auch aus den reellen Koordinaten des Scheitels folgen die komplexen Nullstellen.

5. Die x-Koordinate des Scheitels ist der Mittelwert zwischen beiden Nullstellen.
Stimmt das immer noch?

$x_S = (x_1 + x_2) / 2 = (3 + 2\,i + 3 - 2\,i) / 2 = 3$ ☑

Auch grafisch ist das "schön" zu sehen!

Die Nullstellen sind zwei Punkte in der Re, Im - Ebene der komplexen Zahlen.
x_S als der Mittelwert davon:
Der Scheitel liegt dann auf der Re-Achse, hat also den Imaginärteil Null!



6. Kontrolle: Sind x_1 und x_2 tatsächlich Nullstellen, ist y = f(x) dort auch tatsächlich Null?

$y = x^2 - 6\,x + 13$

$x_1 = 3 + 2\,i$: $y = (3 + 2\,i)^2 - 6\,(3 + 2\,i) + 13 = 9 + 12\,i + 4\,i^2 - 18 - 12\,i + 13 = 0$ ☑

$x_2 = 3 - 2\,i$: $y = (3 - 2\,i)^2 - 6\,(3 - 2\,i) + 13 = 9 - 12\,i + 4\,i^2 - 18 + 12\,i + 13 = 0$ ☑

Die algebraische Behandlung der Parabel ist ohne Probleme auch für komplexe Nullstellen möglich!