Quadratische Funktion - Übungen

1a) "Verständnisfragen" zu "Scheitel und Allgemeine Form" - mit Tipps. Teilweise: 💣💣

🔔 Trotz der Tipps nicht immer einfach!

Wir haben die Formeln:

Allgemeine Form:	$y = a\,x^2 + b\,x + c$	(Gl. 1)
Scheitelpunkts-Form	$y = a\,(x - x_S)^2 + y_S$	(Gl.2)
Scheitel	$S(x_S \mid y_S) = S(\,-b/(2a) \mid (4ac - b^2) / (4a)\,)$	(Gl. 3)
(oder)	$S(x_S \mid y_S) = S(\,-b/(2a) \mid c - b^2 / (4a)\,)$	(Gl. 3')

1) Der Scheitel liegt irgendwo auf der y-Achse. Welche Bedingungen gelten dann für b und/oder c, wenn $a \neq 0$?
   Tipps: Der Scheitel liegt auf der y-Achse, welchen Wert hat dann also x_S? Was folgt daraus mit der Gleichung 3? Gilt auch eine Bedingung für c? Aus der Aufgabenstellung ist nur gefordert, dass der Scheitel irgendwo auf der y-Achse liegen soll, wo genau ist unwichtig! Damit wissen wir also nur, welchen Wert x_S haben muss!
2) Wann liegt der Scheitel irgendwo auf der x-Achse? Wann liegt der Scheitel oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse? Gibt es eine einfache Bedingung dafür - d.h. kann man sagen, welche Werte b und c haben müssen? ($a \neq 0$)
   Tipps: Wie bei Aufgabe 1) muss man hier die Ausdrücke in der Gleichung 3 genauer ansehen. Weiß man aus der Aussage "irgendwo auf der x-Achse" etwas Genaues über den Wert von x_S? Wenn ein Punkt $P(x|y)$ auf der x-Achse liegt, welchen Wert hat dann y? Was ist für die Lage eines Punktes $P(x|y)$ relativ zur x-Achse wichtig - nur y oder auch x?
3) Eine nach unten offene Parabel mit $c = 0$ liegt vor. Welche Bedingungen gelten für die Vorzeichen von a und b, damit der Scheitel oberhalb der x-Achse liegt? ("Tipp" für die Lösung: eventuell spielt das Vorzeichen keine Rolle.)
   Tipps: Was weiß man über die Konstante a, wenn eine Parabel "nach unten offen ist"? Ein Scheitel "oberhalb der x-Achse" liegt dann vor, wenn y_S positiv ist. Laut Aufgabenstellung ist $c = 0$? Was bleibt dann übrig (siehe Gleichung 3')? Das Vorzeichen von a ist bekannt, welche Bedeutung hat dann das Vorzeichen von b für den gesamten Ausdruck?
4) Wo liegt der Scheitel relativ zur x-Achse, wenn $a>0$ und $c<0$?
   Tipps: Die Lage relativ zur Achse - betrifft das die x- oder die y- Koordinate? Wir müssen also entweder x_S oder y_S untersuchen. Zwei Vorzeichen, von a und c, sind durch die Aufgabenstellung bekannt. Spielt das Vorzeichen von b eine Rolle? Damit kommen wir zu einer Aussage über das Vorzeichen der Koordinate des Scheitels.
5) Welche Bedingungen gelten für die Vorzeichen von a und b, damit der Scheitel rechts von der y-Achse liegt?
   Tipps: Rechts von der y-Achse - betrifft das den Wert von x_S oder y_S? (Ist ja eigentlich sofort klar, denn für eine Achse gibt es rechts/links dazu, für die andere oberhalb/unterhalb.) Wenn wir nun wissen, um welche Koordinate (x_S oder y_S) es geht, müssen wir in den Formeln 3 nachsehen, wie sich die Vorzeichen von a und b darauf auswirken.
6) Ein Scheitel liegt links von der y-Achse. Kann man durch Änderung von c erreichen, dass der Scheitel dann rechts von der y-Achse liegt?
   Tipps: Wenn wir Aufgabe 5) gelöst haben, wissen wir, um welche Koordinate, x_S oder y_S, es geht. Dann schauen wir den entsprechenden Ausdruck - der Gleichungen 3 - an, und sehen, wie sich eine Änderung des Werts von b daraus auswirkt.

7) Ein Scheitel liegt oberhalb von der x-Achse. Kann man durch Änderung von c erreichen, dass der Scheitel dann unterhalb von der x-Achse liegt?
Tipps: Wie bei Nr. 6 stellen wir zuerst fest, um welche Koordinate, x_S oder y_S, es geht. Wie kommt c in dieser Formel vor? Wie ändert sich der Ausdruck, wenn c sehr groß oder sehr klein wird?

1b) "Verständnisfragen" zu "Scheitel und Allgemeine Form" - Lösungen

1) Der Scheitel liegt auf der y-Achse, die Parabel ist also symmetrisch zur y-Achse,
wenn $x_S = 0$. Damit: $-b/(2a) = 0 \Rightarrow$ **$b = 0$**. Die Angabe $a \neq 0$ der Aufgabenstellung sichert, dass keine Division durch 0 auftritt.
Für **c** liefert dies **keine Bedingung**; c bestimmt, wo auf der y-Achse der Scheitel liegt.
Im Ausdruck für x_S kommt c nicht vor!
{Formal: $y_S = 4ac/4a = c$ für $b = 0$.}
2) Auf der x-Achse: $y_S = 0$: $4ac = b^2$.
Oberhalb bzw. unterhalb: $(4ac - b^2) / (4a)$ ist positiv oder negativ.
Nur durch eine **Rechnung** können wir jeweils **entscheiden**!
3) Eine nach unten offene Parabel besitzt **$a<0$**. Wegen $c = 0$ folgt $y_S = - b^2/(4a)$. Dieser Wert ist **unabhängig vom Vorzeichen von b** und für $a<0$ stets positiv. (In der allgemeinen Form wäre das wohl kaum einfach aus den Konstanten allein erkennbar!)
4) $y_S = (4ac - b^2) / (4a) = c - b^2/(4a) \Rightarrow$ "negativ" - "positiv" = stets negativ. Das Vorzeichen von b spielt wegen b^2 keine Rolle. Der Scheitel liegt dann **immer unterhalb** der x-Achse.
5) Rechts von der y-Achse bedeutet $x_S > 0$. $x_S = -b/(2a)$. Dieser Ausdruck ist positiv, wenn
$a>0$ und $b<0$ oder $a<0$ und $b>0$. a und b müssen **verschiedenes** Vorzeichen haben.
6) Die Lage relativ zur y-Achse ist durch x_S bestimmt. Im Ausdruck dafür kommt c nicht vor. c hat keinen Einfluss, also "**nein**".
7) Der Zähler für den Ausdruck für y_S ist $4ac - b^2$. Wenn 4ac hinreichend klein oder negativ ist, liegt der Scheitel unterhalb der x-Achse. Durch Änderung von c ist das (abhängig von a und b) zu erreichen, also "**ja**".

2a) Übungen - Teilweise:

1) Geben Sie Ausdrücke für b und c (Allgemeine Form) als Funktion von x_S und y_S an.
2) Lösen Sie $x^2 - x - 6 =0$ mit der "allgemeinen Formel" und mit dem Verfahren der Quadratischen Ergänzung.
3) Lösen Sie $x^2 + 4 x - 32 = 0$ mit dem Verfahren der Quadratischen Ergänzung. Eventuell erleichtert eine Schreibweise $x^2 + 4 x = 32$ die Durchführung. Verfahren Sie so.
4) Gegeben sind $x_1 = 7$ und $x_2 = 2$. Geben Sie die dazu passenden Gleichung $y = 0$ in der Normalform und in einer möglichen Allgemeinen Form, mit $a\neq1$, an. (Normalform: $x^2 + px + q = 0$; Allgemeine Form: $a x^2 + b x + c = 0$.)
5) Wir haben bisher Formeln für x_S und y_S als Funktion von a, b und c der Allgemeinen Form. Geben Sie Formeln für x_S und y_S als Funktion von p und q der Normalform an.
(Bevor Sie wild losrechnen, kurz überlegen! Wenn $a = 1$, dann ist der Teil x^2 gleich. Und dann? "Buchstaben sind Schall und Rauch")
6) a) Was gilt immer für die Lage eines Scheitels auf der x-Achse relativ zu den beiden Nullstellen? (Die Sache ist zeichnerisch sofort einzusehen). Wie geht es rechnerisch?
b) *(Schwieriger)* Berechnung der Nullstellen aus den Koordinaten des Scheitels. (Die ähnlich aussehenden Formeln legen einen Zusammenhang nahe!)
7) Ist eine allgemeine Aussage über die beiden Nullstellen (Vergleich der Vorzeichen und Werte) möglich, wenn in der Allgemeinen Form $b = 0$? (Dabei ist auch zu fordern, dass die Vorzeichen von a und b so sind, dass alle vorkommenden Operationen möglich sind.)

8) a) Geben Sie für eine Parabel mit den Nullstellen 2 und -3 Ausdrücke für $y = f(x)$ in den möglichen Formen an, wenn $a = 1$ ist. (Wegen $a = 1$ kann auch eine "Normalform angegeben werden.)

b) Geben Sie für eine Parabel mit den Nullstellen 2 und -3 Ausdrücke für $y = f(x)$ in den möglichen Formen an, wenn $a = 4$ ist. (Was ist zu beachten, wenn man in die "Normalform" umrechnen würde?)

c) Vergleichen Sie die Koordinaten des Scheitels für die beiden Fälle $a = 1$ und $a = 4$.

9) Gegebene Parabel: $y = x^2 - 5x + 6$. a) Wie lautet die Gleichung der Parabel, wenn der Scheitel um 1 nach rechts verschoben wird? (Normalform) b) Wie lautet die Gleichung der Parabel, wenn der Scheitel um 2 nach unten verschoben wird? (Normalform)

2b. Lösungen zu den Übungen

1) Vergleich:

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S = a x^2 - 2 a x x_S + a x_S^2 + y_S$$
$$= a x^2 + (-2 a x_S) x + a x_S^2 + y_S$$
$$y = ax^2 + b x + c$$

Koeffizienten-Vergleich: (**a** = **a); b = - 2 a x_S** ; **c = a x_S^2 + y_S**

2) a) $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$: $x_{1,2} = 1/2 \pm \{1/4 + 6\}^{1/2} = 1/2 \pm 5/2$. **$x_1 = 3$; $x_2 = -2$**.

b)

$x^2 - x - 6 = 0$	Hälfte des Koeffizienten bei x ist - 1/2
$x^2 - x + \mathbf{1/4} - 6 - \mathbf{1/4} = 0$	Quadrat davon addiert (und wieder subtrahiert)
$(x - 1/2)^2 - 25/4 = 0$	Binomischer Ausdruck erzeugt
$x - 1/2 = \pm 5/2$	25/4 auf rechte Seite, Wurzel auf beiden Seiten, nach x aufgelöst

$\mathbf{x_1} = 1/2 + 5/2 = \mathbf{3}$; $\mathbf{x_2} = 1/2 - 5/2 = \mathbf{-2}$.

3) $x^2 + 4x - 32 = 0$

$x^2 + 4x = 32$	Halber Koeffizient vor x ist 2
$x^2 + 4x + \mathbf{4} = 32 + \mathbf{4}$	Quadrat davon auf beiden Seiten addiert
$(x + 2)^2 = 36$	Binom
$x + 2 = \pm 6$	Wurzel

$\mathbf{x_1} = 6 - 2 = \mathbf{4}$; $\mathbf{x_2} = -6 - 2 = \mathbf{-8}$

4) Wenn die beiden Nullstellen bekannt sind, kann sofort die Linearfaktoren-Form angegeben werden.

$(x - x_1)(x - x_2) = (x - 7)(x - 2) = 0 = x^2 - 7x - 2x + 14$

Geordnet: $\mathbf{x^2 - 9x + 14 = 0}$. Das ist die Normalform.

Eine mögliche Allgemeine Form entsteht durch Multiplizieren mit einer Konstanten. Das ändert nichts an der Gleichung $y = 0$. Zum **Beispiel**: $\mathbf{3x^2 - 27x + 42 = 0}$.

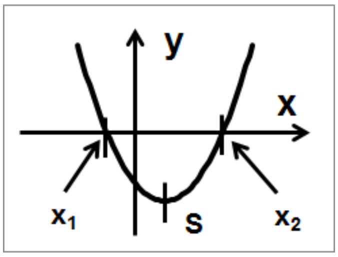
5) Vergleich für $a = 1$: $y = x^2 + bx + c$ und $y = x^2 + px + q$. Es muss also in den vorhandenen Formeln nur $a = 1$ gesetzt werden, und b durch p und c durch q ersetzt werden.

(Namen sind nur Platzhalter für das mathematische Objekt "Konstante".)

$S(x_S | y_S) = S(-b/(2a) | (4ac - b^2) / (4a) \rightarrow S(x_S | y_S) = S(-p/2 | (4q - p^2) / 4) =$ **$S(-p/2 | q - p^2/4)$**.

6) a) Grafisch: S liegt in der Mitte zwischen beiden Nullstellen.

Trivialerweise ist dabei angenommen, dass zwei Nullstellen existieren. Es gibt selbstverständlich auch einen Scheitel, wenn keine Nullstellen vorliegen.



Rechnerisch am schnellsten durch Vergleich der Linearfaktoren-Form und der Allgemeinen Form:

$y = a(x - x_1)(x - x_2) = a\{x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\}$.

$y = a x^2 + b x + c$;

Vergleich: $b = -a(x_1 + x_2)$

Scheitel: $\mathbf{x_S} = -b/(2a) = (x_1 + x_2) / 2$

also **Mittelwert der Nullstellen**.

b) Scheitelpunktsform $y = a\,(x - x_S)^2 + y_S = a\,x^2 - 2\,a\,x\,x_S + a\,x_S{}^2 + y_S$

Nullstellen: Formel $x_{1,2} = \frac{+b\ \pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}$; $b = 2\,a\,x_S$; $c = a\,x_S{}^2 + y_S$.

$\mathbf{x_{1,2}} = \frac{+2\,a\,x_S\ \pm\sqrt{4\,a^2\,x_S^2 - 4\,a^2\,x_S^2 - 4\,a\,y_S}}{2\,a} = x_S\ \pm\ \frac{\sqrt{-4\,a\,y_S}}{2\,a} = x_S\ \pm\ \sqrt{\frac{-4\,a\,y_S}{4\,a^2}} = \mathbf{x_S}\ \pm\ \sqrt{-\frac{\mathbf{y_S}}{\mathbf{a}}}$

- Auch hier wieder: Die Nullstellen liegen symmetrisch zur x-Koordinate des Scheitels.
- Wenn a = 0, liegt keine Parabel vor! y = f(x) hat dann auch keinen Scheitel!
- Wenn a >0: nach oben offene Parabel: y_S muss negativ sein, damit eine Wurzelbildung im Reellen möglich ist. Der Scheitel muss unterhalb der x-Achse liegen. Falls der Scheitel oberhalb der x-Achse liegt, gibt es keine Schnittpunkte mit der Achse, also keine Nullstellen. Falls $y_S = 0$, gibt es nur eine (doppelte) Nullstelle. Das ist auch mit der Skizze zu einzusehen: Scheitel und Nullpunkt fallen dann zusammen.
- Wenn a< 0: nach unten offene Parabel: y_S muss positiv sein, damit eine Wurzelbildung im Reellen möglich ist. Der Scheitel muss oberhalb der x-Achse liegen. Ansonsten keine Nullstellen oder für $y_S = 0$ eine (doppelte) Nullstelle auf der x-Achse.

Formale Kontrolle: Wenn man die gefundenen Nullstellen in die Linearfaktoren-Form einsetzt, müsste wieder die richtige Scheitelpunkts-Form entstehen:

$y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = a\,\{(x - x_S - \sqrt{-\frac{y_S}{a}}\,)\,(x - x_S + \sqrt{-\frac{y_S}{a}})\}$; binom. Formel benutzen!

$y = a\,\{\,(x - x_S)^2 - \frac{-y_S}{a}\,\} = a\,(x - x_S)^2 + y_S$. ☑

7) Für b= 0 ist $y = a\,x^2 + c = 0$; $a\,x^2 = -c$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

Damit die Bildung der Wurzel möglich ist, muss ein positiver Ausdruck vorliegen, a und c müssen also verschiedenes Vorzeichen haben; das Ergebnis ist dann eine reelle Zahl. $x_{1,2} = \pm$ Zahl (mit gleichem Betrag für beide Nullstellen).

Gleicher Absolut-Wert, verschiedenes Vorzeichen für die beiden Nullstellen.

8) a) <u>Formeln für **a = 1**</u>

Linearfaktoren-Form: Nullstellen direkt einsetzen: $\mathbf{y = (x - 2)\,(x + 3)}$

Normalform: Vieta-Formel benutzen: $p = -(2 - 3) = 1$; $q = 2\cdot(-3) = -6$;
oder ausmultiplizieren: $(x -2)\,(x + 3) = x^2 - 2x + 3x - 6 \Rightarrow \mathbf{y = x^2 + x - 6}$

Allgemeine Form: mit a = 1 ergibt sich dieselbe Formel wie die Normalform

Scheitel aus der Normalform: $x_S = -p/2 = -1/2$;
$y_S = q - p^2/4 = -6 - 1/4 = -25/4$.

Damit *Scheitelpunkts-Form*: $y = (x - (-1/2))^2 + (-25/4) \Rightarrow \mathbf{y = (x + 1/2)^2 - 25/4}$

b) <u>Formeln für **a = 4**</u>

Die *Linearfaktoren-Form* folgt durch Einsetzen der Nullstellen in $y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$:

$\mathbf{y = 4\,(x - 2)\,(x+3)}$

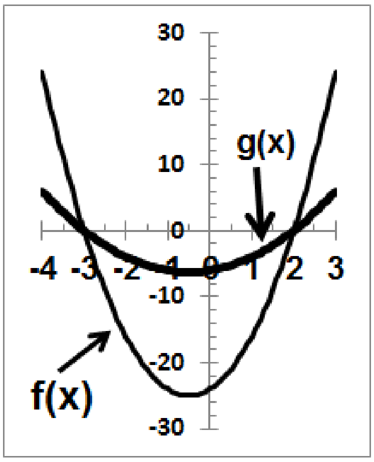
Durch Ausmultiplizieren erhält man die *Allgemeine Form*: $\mathbf{y = 4\,x^2 + 4\,x - 24}$.

Scheitel davon: $x_S = -b/(2a) = -4/8 = -1/2$;
$y_S = (4ac - b^2) / (4a) = (-384-16)/16 = -25$.

Scheitelpunkts-Form: $4\,(x - (-1/2))^2 + (-25) = \mathbf{4\,(x + 1/2)^2 - 25}$.

Wenn man daraus mit einer Division durch 4 (damit der Vorfaktor 1 bei x^2 entsteht) eine *"Normalform"* erzeugt, erhält man $y = x^2 + x - 6$. Das ist dasselbe wie für den Fall a = 1!

Wie man aber durch Einsetzen von Werten für x
und Ausrechnen von y sofort sieht,
ergeben sich unterschiedliche Funktionswerte.
f(x) = $4 x^2 + 4 x - 24$
und
g(x) = $x^2 + x - 6$
sind **verschiedene Funktionen**!
Sie haben aber **dieselben Nullstellen**.
f(x) = 0 und g(x) = 0
haben dieselben Lösungen.



.

> Das Umrechnen in die Normalform ist also nur sinnvoll bei der Quadratischen Gleichung,
> nicht aber allgemein bei der Quadratischen Funktion!

c) Vergleich der Scheitel

Für a = 1: S(-1/2 | -25/4); für a = 4: S(-1/2 | - 25).
a führt nur zu einer Streckung in Richtung y-Achse, aber zu keiner Verschiebung in Richtung x-Achse. Darum ist **die x-Koordinate in beiden Fällen gleich**, aber die y-Koordinate durch die Streckung um den Faktor 4 geändert. (Wenn die gesamte Kurve in der y-Richtung gestreckt wird, wird auch die y-Koordinate des Scheitels mit diesem Faktor gestreckt.)

9) Parabel: $y = x^2 - 5x + 6$

Weil hinterher die Lage des Scheitels verändert wird, benötigt man als erstes die Scheitelpunkts-Form. Es können die Formeln für die Bestimmung des Scheitelpunkts aus der Normalform benutzt werden.

$x_S = -p/2 = 2{,}5 = 5/2$

$y_S = (4q - p^2) / 4\ ) = (24- 25) / 4 = - 1/4$

Kontrolle: Alte Scheitelpunkts-Form: $y = (x - x_S)^2 + y_S = (x - 5/2)^2 - 1/4$

Ausmultipliziert: $x^2 - 5 x + 25/4 - 1/4 = x^2 - 5 x + 24/4 = \mathbf{x^2 - 5 x + 6}$

a) Scheitel um 1 nach rechts verschoben: Neues $x_S = 3{,}5 = 7/2$

Neue Scheitelpunkts-Form: $y = (x - x_S)^2 + y_S = (x - 7/2)^2 - 1/4$

Ausmultipliziert: $x^2 - 7 x + 49/4 - 1/4 = x^2 - 7 x + 48/4 = \mathbf{x^2 - 7 x + 12}$

Dies ist die gesuchte Normalform.

b) Scheitel um 2 nach unten verschoben: Neues $y_S = - 1/4 - 2 = - 9/4$

Neue Scheitelpunkts-Form: $y = (x - x_S)^2 + y_S = (x - 5/2)^2 - 9/4$

Ausmultipliziert: $x^2 - 5 x + 25/4 - 9/4 = x^2 - 5 x + 16/4 = \mathbf{x^2 - 5 x + 4}$