Übungsbeispiel zu Gleichungsformen der Quadratischen Funktion

Scheitel S(3 | -4). Gesucht Scheitelpunkts-Form und Allgemeine Form

Warum fehlt noch eine Angabe?

Aus den Gleichungen ist zu sehen, dass auch a bekannt sein muss. Für eine quadratische Gleichung - zur Bestimmung der Nullstelle - würde die Angabe ausreichen. Für den Kurvenverlauf der Funktion, also für die gesamte Funktionsgleichung, ist auch a wichtig.

1.

Wir benutzen als Erstes **a = 1**!

Damit: $y = f(x) = (x - 3)^2 - 4$ durch direktes Einsetzen der bekannten Koordinaten des Scheitelpunkts. Nach Ausmultiplizieren und Ordnen:

$y = f(x) = x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5$.

Geben Sie die Nullstellen an.

Wegen a = 1 ist die p,q-Formel der Normalform benutzbar:

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -(-3) \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 5.$

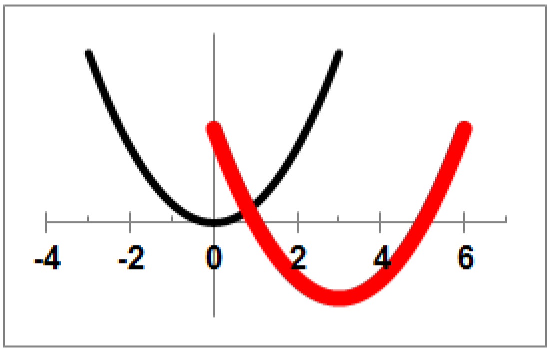
Die Nullstellen liegen symmetrisch zur x-Koordinate 3 des Scheitels.

Wie unterscheidet sich diese Parabel von der Normalparabel $y = x^2$?

Weil a > 0 haben wir dieselbe Orientierung - nach oben offen.

Weil | a | = 1 liegt keine Verzerrung, verglichen mit der Normalparabel, vor.

Die ganze Kurve ist verschoben, mit dem neuen Scheitel S(3|-4) an Stelle von S(0|0) für die Normalparabel.



2.

Als zweiten Fall wählen wir **a = 6.** Der Scheitel ist wie bei 1. S(3 | -4).

Gesucht sind die Scheitelpunkts-Form und die Allgemeine Form.

$y = 6(x - 3)^2 - 4$

ausmultipliziert und geordnet

$y = 6(x^2 - 6x + 9) - 4 = 6x^2 - 36x + 54 - 4 = 6x^2 - 36x + 50$.

Schon vom Ansatz der Formel her bleibt der Scheitel erhalten. In der Scheitelpunkts-Form ist dies sofort zu sehen. In der Allgemeinen Form ist dies nicht erkennbar.

Sind die Nullstellen dieselben wie für 1. mit a = 1?

Nein, die Rechnung liefert

$x_{1,2} = [+36 \pm \{ 1296 - 4 \cdot 6 \cdot 50 \}^{1/2}] / 12 =$

$= [36 \pm 96^{1/2}] / 12 = 3 \pm \{2/3\}^{1/2}$.

$x_1 \approx 2{,}18;\ x_2 \approx 3{,}82$.

Für die Bestimmung der Nullstellen, also die Quadratische Gleichung, kann auch die Normalform verwendet werden.

Division der Allgemeinen Form durch 6 liefert $x^2 - 6x + 25/3 = 0$.

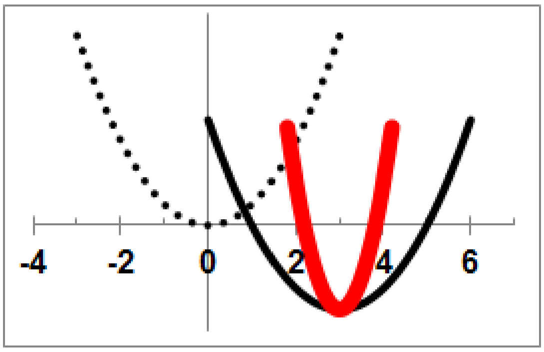
$x_{1,2} = 3 \pm \{ 9 - 25/3 \}^{1/2} = 3 \pm \{ 27/3 - 25/3 \}^{1/2} = 3 \pm \{2/3\}^{1/2}$.

Kurvenverlauf, verglichen mit der Normalparabel

Der Vorfaktor a ändert nichts an der Lage des Scheitels.

a > 1: Verglichen mit der Normalparabel ist die Funktion gestaucht.

Damit ändern sich auch die Nullstellen. Erhalten bleibt natürlich die Eigenschaft, dass die Nullstellen symmetrisch zur x-Koordinate des Scheitels liegen.



3.

Für die quadratische Gleichung f(x) = 0 darf man die ganze Gleichung durch den Vorfaktor von x^2 dividieren und erhält so aus der Allgemeinen Form die Normalform. Warum darf man eine solche Umformung nicht für die Untersuchung der quadratischen Funktion durchführen?

Antwort 1: Man darf es halt nicht - und damit basta!

Welche neue Funktion bzw. Kurve entsteht dann? Das möchte ich am Beispiel sehen!

Eine mögliche allgemeine Form ist $y = 2x^2 - 12x + 10$.

Wenn man die ganze Gleichung durch 2 dividiert entsteht $y = x^2 - 6x + 5$.

Das war die in 1. benutzte Formel! {Scheitel S(3|-4), Nullstellen 1; 5}

Die falsche Idee ist: Weil ich das bei Gleichungen machen darf, darf ich das auch für die Funktion machen! Wenn man aber den Graphen zeichnet, sieht man sofort, dass eine andere Funktion vorliegt!

Das sind **verschiedene** Kurven!

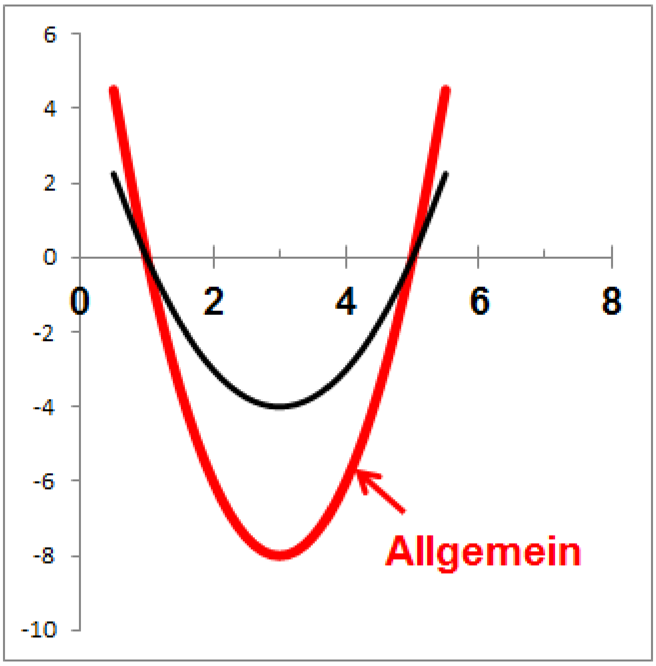
f(x) und a·f(x) sind nicht die gleiche Funktion!

Gleich bleibt die Lage der beiden Nullstellen.

Gleich bleibt die x-Koordinate des Scheitels.

Der Scheitel liegt in der Mitte der beiden Nullstellen.

Der gesamte Kurvenverlauf ist aber **verschieden**!



Der **Scheitel** für $y = x^2 - 6x + 5$ liegt bei S(3 | -4). Nach der Grafik liegt der Scheitel für $y = 2x^2 - 12x + 10$ bei S(3 | -8). Die x-Koordinate ändert sich nicht. Die y-Koordinate ist um den Faktor 2 größer - eigentlich ganz logisch, weil ja die ganze Gleichung "y = ..." mit 2 multipliziert wurde! Der Scheitel ist eine Eigenschaft der Funktion, daher darf nicht einfach durch eine Konstante gekürzt werden.

Die **Nullstellen** bleiben gleich. Wenn $f(x) = 0$ ist auch $a \cdot f(x) = 0$, daher kann durch eine Konstante bei der Nullstellen-Bestimmung gekürzt werden.

Die Nullstellen wurden schon vorher berechnet. In der Grafik ist der neue Scheitel zu sehen. Dieser Wert soll aber auch noch berechnet werden!

Bestimmung der Scheitelpunkts-Form - mit bekannten Lösungsformeln

$f(x) = 2x^2 - 12x + 10$

$$\mathbf{x_S = -\frac{b}{2a};\ \ y_S = c - \frac{b^2}{4a}}$$

$x_S = -(-12) / 4 = 3$; $y_S = 10 - 144 / 8 = 10 - 18 = -8$. S(3 | -8)

$y = f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$

Bestimmung der Scheitelpunkts-Form - mit der "quadratischen Ergänzung"

$f(x) = 2x^2 - 12x + 10$	| Der Koeffizient bei x^2 soll 1 sein.
$f(x) = 2(x2 - 6x + 5)$	| Halber Koeffizient von x = -3, Quadrat davon 9
$f(x) = 2(x^2 - 6x \underline{+ 9} + 5 \underline{- 9})$	| Quadratisch ergänzt
$f(x) = 2(x^2 - 6x + 9) + 2 \cdot (-4)$	| Geordnet
$f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$	| Binomische Formel

Division von $ax^2 + bx + c$ durch a:

Für die Lösung einer quadratischen <u>Gleichung</u> ist die Umformung der Allgemeinen Form in die Normalform eventuell nützlich, weil ...?

Die Nullstellen ändern sich nicht, wenn die gesamte Gleichung $f(x) = 0$ mit einer Konstanten multipliziert wird. Wenn $f(x) = 0$ ist auch $a \cdot f(x) = 0$.

Rechnerisch ist die p,q-Formel oft bequemer.

Zur Untersuchung der quadratischen <u>Funktion</u> ist eine Umformung aus der Allgemeinen Form in die Normalform falsch, weil ...?

$f(x) \neq a \cdot f(x)$! Unverändert bleiben die Nullstellen und damit auch die x-Koordinate des Scheitels, der gesamte Kurvenverlauf ändert sich aber!

Bedeutung von a:

In allen Formen:

Stauchung oder Dehnung der Parabel.

Was bleibt durch verschiedenes a unverändert?

In der Linearfaktoren-Form

Die Nullstellen

In der Scheitelpunkts-Form

Die Lage des Scheitels

In der Allgemeinen Form

Wenn <u>nur</u> a geändert wird: Nichts! Dann ändert sich die ganze Funktion!