Abstandsberechnung mit der Hesse-Normalenform

Wir erinnern uns:

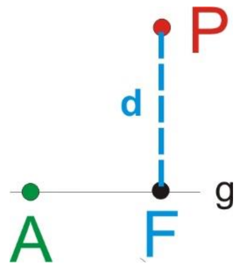
Die Hesse-Normalenform hat stets (Gerade oder Ebene) die Formel: $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n_o} = 0$.

x ist ein Ortsvektor zu einem allgemeinen Punkt auf der Ebene, und **a** der Stützvektor.

Und "ziemlich ähnlich" berechnet man den Abstand d eines Punkts P (mit dem Ortsvektor **p**) von einer Geraden oder einer Ebene.

Unter "Abstand" dabei der senkrechte Abstand gemeint, also die Länge des Lots vom Punkt P auf die Gerade bzw. Ebene.

Unter allen Abständen von P zu Punkten auf einer Geraden g (durch A) ist der Abstand zum "Lotfußpunkt" F der kleinste.



Für den Abstand gilt: $\boxed{d = (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n_o}}$

Anstelle des allgemeinen Punkts wird der Punkt P eingesetzt.

In dieser Formel kann d positiv oder negativ sein. d ist positiv, wenn der Punkt P und die Richtung des Normalenvektors auf derselben Seite der Geraden bzw. Ebene liegen.

Falls man sich an einem "negativen Abstand" stört, kann man auch den Abstand über den Betrag definieren: $|(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n_o}| = d$.

Die Formel enthält natürlich die ursprüngliche Definition der Normalenform als Sonderfall. Wenn ein Punkt P auf der Geraden g oder in der Ebene E liegt, ist der Abstand Null.

Die Herleitung ist ein interessantes Beispiel für die Anwendung des Skalarprodukts.

Zuerst für eine Gerade. Weil wir die Normale **n** verwenden, soll das für R^2 gelten.

Anmerkung / Erinnerung: Die Herleitung würde auch für eine Gerade in R^3 gelten, aber wir können dafür keine (eindeutige) Normale finden!

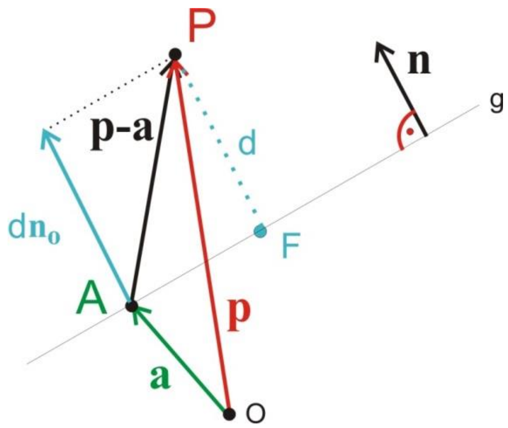
Der Aufpunkt A liegt auf der Geraden.

Der Punkt P liegt nicht auf derGeraden.

Die Normale **n** steht senkrecht auf der Geraden.

Der Abstand d vom Punkt zur Geraden ist die Länge des Verbindungsvektors zwischen Punkt P und dem dazugehörenden "Lotfußpunkt" F auf der Geraden.

p-a ist der Verbindungsvektor von A nach P.



"Interessant" ist der Verbindungsvektor $\overrightarrow{\mathbf{FP}}$. Er zeigt in dieselbe Richtung wie die Normale **n** und hat die Länge d. Dies lässt sich umformulieren in Länge d, multipliziert mit einem Einheitsvektor $\mathbf{n_o}$. d liefert dann die gewünschte Länge und $\mathbf{n_o}$ die gewünschte Richtung!

$\overrightarrow{\mathbf{FP}} = d \cdot \mathbf{n_o}$.

Der Vektor d · $\mathbf{n_o}$ wird parallel an den Anfangspunkt A verschoben.

(Die Linie zwischen dem Endpunkt von d $\mathbf{n_o}$ und dem Punkt P ist parallel zur Richtung von g.)

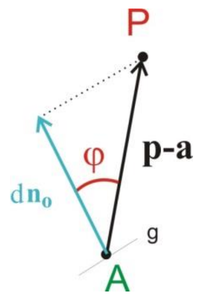
Für das (rechtwinklige) Dreieck können wir den Cosinus angeben:

$\cos(\varphi) = |d \cdot \mathbf{n_o}| / |\mathbf{p} - \mathbf{a}|$

Mit $|d\ \mathbf{n_o}| = d$ ist $d = \cos(\varphi) \cdot |\mathbf{p} - \mathbf{a}|$.

(... Wir kennen immer noch nicht d und φ! ... und φ wird auch nicht berechnet!)

(... ABER! ...)



Nun sehen wir uns das Skalarprodukt $(\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o}$ an!

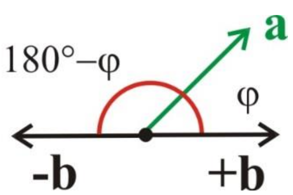
Dieses ist $|\mathbf{p} - \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{n_o}| \cdot \cos(\varphi)$ - wobei φ der Winkel zwischen beiden Vektoren ist.

Wegen $|\mathbf{n_o}| = 1$ ist insgesamt $(\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o} = |\mathbf{p} - \mathbf{a}| \cdot \cos(\varphi)$ und nach Vergleich mit der Skizze ist dies gleich d!

Noch eine kurze Überlegung zum Vorzeichen.

Wenn φ der Winkel zwischen **a** und **+b** ist, ist 180°-φ der Winkel zwischen **a** und **-b**. Es gilt $\cos(180°-\varphi) = -\cos(\varphi)$.

Wenn P und das Ende von d $\mathbf{n_o}$ auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen, berechnen wir mit dem Skalarprodukt daher den negativen Wert für den Abstand d.



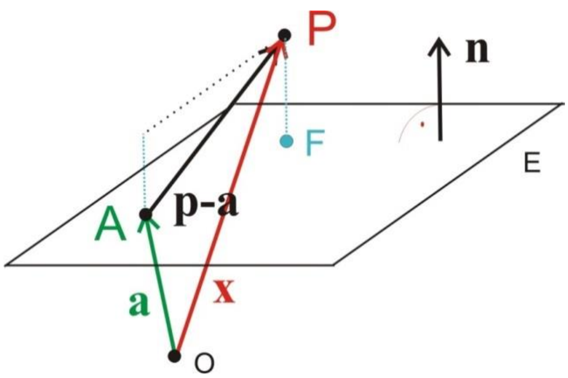
Für den Abstand eines Punkts von der Ebene können wir gleichartig vorgehen!

Der Abstand zwischen P und dem dazugehörenden Lotfußpunkt F ist $|d \cdot \mathbf{n_o}|$.

Nach Verschiebung auf den Anfang A liegt ein gleichartiges Dreieck mit dem Winkel φ vor.

(A, P und der Endpunkt des verschobenen d · $\mathbf{n_o}$ liegen in einer Ebene.)

Die gleiche Überlegung wie vorher führt zur Endformel.



Anmerkung: Geometrisch / anschaulich ist klar, dass der Abstand Null sein muss, wenn P auf der Geraden oder in der Ebene liegt. Formal lässt sich kontrollieren:

$(\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o} = d$ und $\mathbf{p} = \mathbf{a} + t\cdot\mathbf{u}$ (P auf der Geraden mit Stützvektor **a**)

$(\mathbf{a} + t\cdot\mathbf{u} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o} = t \cdot \mathbf{u}\cdot\mathbf{n_0} = 0$ (weil $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}$).

(Analog für eine Ebene wegen $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}$ und $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$)