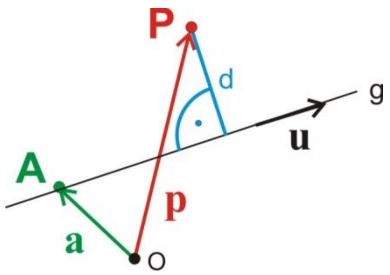
Punkt - Gerade in R^2

Die (ausführliche) Erklärung soll das Verständnis bei den komplexeren Fällen erleichtern.

Der Abstand eines Punkts P mit dem Ortsvektor **p** zu einer Geraden mit der Parameterdarstellung **x** = **a** + t **u** ist gesucht.

"Abstand" ist dabei der kürzeste Abstand.
Dies ist dann die Länge eines Lots d vom Punkt P auf die Gerade g.

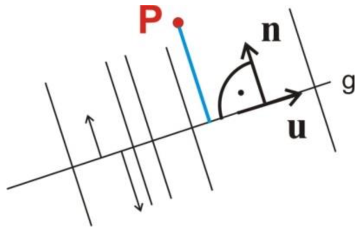


Um diese Strecke d zu finden benutzen wir die Normale **n**, die senkrecht auf **u** steht. Die Koordinatendarstellung in R^2 kann ganz einfach angegeben werden. (Vertauschung der Koordinaten und 1 Vorzeichenwechsel.)

n ⊥ **u**.

Damit stehen auch alle dazu parallelen Geraden oder Vektoren senkrecht auf **u**!

Eine dieser Geraden muss die gewünschte sein, die durch den Punkt P geht.

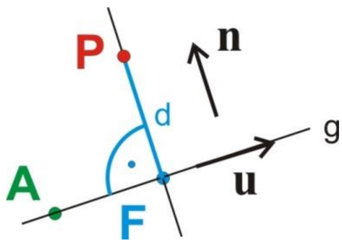


Und für diese Gerade ist alles Nötige bekannt: ein Aufpunkt und eine Richtung.
Also ist diese Gerade **x** = **p** + r **n**

Nun bestimmen wir den Fußpunkt des Lots. Das ist der Schnittpunkt der eben festgelegten Geraden mit der Geraden g.

Den Schnittpunkt nennen wir "Lotfußpunkt" F.

Dazu muss gelöst werden: **a** + t **u** = **p** + r **n**



Nach der Lösung dieser Gleichung wird t oder r in die entsprechende Geradengleichung eingesetzt, und das liefert F. Den gewünschten Abstand d erhalten wir als Betrag von $\overrightarrow{PF}$.

Kurze Zwischenfrage:

Zeigt in der Skizze **n** nicht in die falsche Richtung? **n** sollte doch eher in die Richtung der Geraden zeigen, wenn der Abstand P von F gesucht wird!

Kurze Antwort 1:

n kann von der Geraden aus gesehen, nach rechts oder links zeigen. Normale besagt nur, dass der Vektor senkrecht auf **u** steht. Gleichermaßen spielt die Länge dabei keine Rolle. **n** steht für eine Klasse kollinearer Vektoren.

Kurze Antwort 2:

Als Gerade betrachtet, spielt das auch keine Rolle. Jeder kollineare Vektor kann als Richtungsvektor verwendet werden. Beispiel: Ein Punkt ist gegeben durch **a** + 4 **u**. Dann wird derselbe Punkt durch **a** - 4 (-**u**) beschrieben oder durch **a** + 2 (2**u**).

Zur Lösung von **a** + t **u** = **p** + r **n** in Koordinaten müssen wir 2 lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten lösen.

Eine *Alternative*, die auch als mögliche Rechenkontrolle benutzt werden kann:
Skalar multipliziert mit **n** ist: **a·n** + t **u·n** = **p·n** + r **n·n**
Weil **u** ⊥ **n** ist **u·n** = 0. (**n·n** ist auch $|\mathbf{n}|^2$ - falls man lieber dies einsetzt.)
Aufgelöst: r = { **a·n** - **p·n** } / **n·n**

Und analog **a·u** + t **u·u** = **p·u** + r **n·u.** Aufgelöst: t = { **p·u** - **a·u** } / **u·u**.

♦♦♦ Zusammengefasst:

1. Berechne **n** aus **u** (Koordinatenvertauschung und 1 Vorzeichenwechsel).
2. Löse **a** + t **u** = **p** + r **n** nach t und r.
3. Bestimme F aus **f** = **a** + t **u** oder **f** = **p** + r **n** aus den erhaltenen Werte t und r.
4. Berechne $\overrightarrow{FP}$ und d = | $\overrightarrow{FP}$ |.

Beispiel

g: $\mathbf{x} = \binom{1}{2} + t\binom{3}{4}$; $\mathbf{p} = \binom{5}{6}$.

$\mathbf{n} = \binom{-4}{3}$; Lotgerade durch P: $\binom{5}{6} + r\binom{-4}{3}$. Damit das Gleichungssystem:

[1] 1 + 3 t = 5 - 4 r   3 t + 4 r = 4   12 t + 16 r = 16
[2] 2 + 4 t = 6 + 3 r   4 t - 3 r = 4   12 t - 9 r = 12

[1] - [2]: 25 r = 4 → r = 4/25 → in [1]: 3 t = 4 - 16/25 → t = 28/25.

f: $\binom{1}{2} + 28/25 \cdot \binom{3}{4} = \binom{109/25}{162/25}$ oder $\binom{5}{6} + 4/25 \cdot \binom{-4}{3} = \binom{109/25}{162/25}$

(Wenn beides Mal dasselbe herauskommt, hat man sich wahrscheinlich nicht verrechnet.)

$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} \frac{109}{25} - 5 \\ \frac{162}{25} - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-16}{25} \\ \frac{12}{25} \end{pmatrix}$; d = $\sqrt{256 + 144}$ / 25 =20/25 = 4/5.

(Mögliche) Kontrolle r, t:

r = { **a**·**n** - **p**·**n** } / **n**·**n** = $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\right\} / \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} =$

{ -4 + 6 - (-20) - 18 } / (16 + 9) = 4/25

t = { **p**·**u** - **a**·**u** } / **u**·**u** = $\left\{\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\} / \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} =$

{ 15 + 24 - 3 - 8 } / (9+16) = 28/25

Vergleich (Rechnung mit der Hesse-Formel):

d = |(**p** - **a**)·$\mathbf{n_o}$|; $\mathbf{n_o}$ = **n** / | **n** |

p - **a** = $\begin{pmatrix}5-1=4\\6-2=4\end{pmatrix}$; | **n** | = $\sqrt{16+9}$ = 5; d = $\left|\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\right|$ / 5 = 4/5.

⇒ Für R^2 ist ein Lotfußpunktverfahren wohl kaum sinnvoll!

Beispiel - Sonderfall überprüfen

Folgt auch d = 0, wenn irrtümlich ein Punkt P eingesetzt wird, der auch auf g liegt?

g: **x** = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ + t $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$; **p** = $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$.

[1] 1 + 3 t = 4 - 4 r   3 t + 4 r = 3   12 t + 16 r = 12

[2] 2 + 4 t = 6 + 3 r   4 t - 3 r = 4   12 t - 9 r = 12

[1] - [2]: 25 r = 0 → r = 0 → in [1]: 3 t = 3 - 0 → t = 1.

f: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ + 1 · $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ + 0 · $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$

Der Lotfußpunkt F ist damit gleich dem Punkt P und der Abstand ist 0.

In der Hesse-Formel sehen wir das (schneller)

am Beispiel: **p** - **a** = $\begin{pmatrix}4-1=3\\6-2=4\end{pmatrix}$; und d = $\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\right|$ / 5 = 0,

oder formal: P auf g bedeutet **p** = **a** + s **u** und damit
d = |(**p** - **a**)·$\mathbf{n_o}$ | = |(**a + s u - a**)·$\mathbf{n_o}$ | = | s **u**·$\mathbf{n_o}$ | = 0, weil **u** ⊥ **n**.

Ergänzung: Gerade - Gerade in R^2

Die Aufgabe ist <u>nur dann sinnvoll</u>, <u>wenn beide Gerade parallel</u> sind. Dann wird der Abstand eines beliebigen Punkts von g2 - am einfachsten des Aufpunkts - von g1 nach dem Verfahren "Abstand Punkt - Gerade" berechnet.

Wenn sich die Geraden schneiden, ist die Aufgabe sinnlos. Je nachdem, welchen Punkt auf g2 man auswählt, erhält man irgendeinen (senkrechten) Abstand, von Null bis Unendlich.