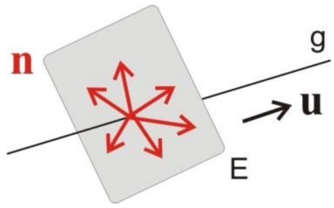
Analytische Geometrie - Lotfußpunktverfahren - Punkt/Gerade (R^3)

Punkt - Gerade in R^3

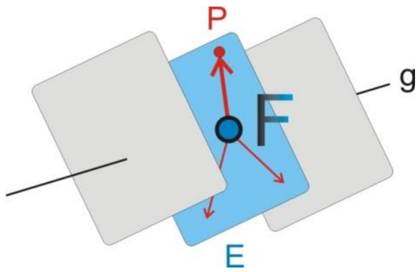
Hier ist die Anwendung der Hesse Normalenform nicht möglich, weil eine (benötigte, eindeutige) Normale nicht angegeben werden kann. Es ist entweder das Lotfußpunktverfahren anzuwenden oder eine Formel mit einem Vektor-Kreuzprodukt zu verwenden.



In R^3 besteht das Problem, dass nur eine zu **u** orthogonale (senkrecht stehende) Ebene definiert werden kann.

Jeder der in dieser Ebene liegenden Vektoren **n** erfüllt die Bedingung **n** ⊥ **u**.

Welcher davon der "richtige" sein könnte, kann nicht entschieden werden. Zusätzlich kann diese Ebene beliebig entlang der Richtung von g verschoben werden, wie oben bei R^2 alle Normalen-Geraden.



Die "richtige" Ebene ist diejenige, die den Punkt P enthält.

Der Durchstoßpunkt der Gerade g durch diese Ebene ist der Lotfußpunkt F.

Die "richtige" Normale zeigt von F nach P.
(Genauer: Sie zeigt in diese Richtung; der Normalenvektor ist also kollinear zu dieser Verbindungslinie.)

Dies ist, geometrisch, die Bedingung, wie F gefunden werden kann.

Der Abstand d zur Geraden kann dann, wie schon bekannt, aus den zwei bekannten Punkten P und F berechnet werden.

Offenkundig haben wir vermieden, den (nicht eindeutig bestimmbaren!) Normalenvektor zu suchen!

Nun verbleibt nur noch die Aufgabe, diese geometrische Überlegung in Formeln umzusetzen. Von der "richtigen" Ebene wissen wir, dass sie senkrecht auf g steht und dass der Punkt P auf ihr liegen muss. Und diese beiden Angaben genügen - sogar ohne lange Rechnung - eine Gleichung der Ebene in der Normalenform anzugeben! Die Normale der Ebene ist der Richtungsvektor **u** der Geraden! (Oder jeder kollineare Vektor dazu)

E: $(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{u} = 0$

Der Lotfußpunkt F (Ortsvektor **f**) ist der Durchstoßpunkt, d.h. der Schnittpunkt, der Geraden g mit dieser Ebene E. (**x** aus beiden Gleichungen muss gleich sein.)
$\mathbf{f} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u}$ in E als **x** eingesetzt: $(\mathbf{a} + t\,\mathbf{u} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{u} = 0$

Dies ist eine Gleichung für t. Mit t kann dann **f** und damit auch $\overrightarrow{FP}$ berechnet werden.

♦♦♦ Zusammengefasst:

1. Löse $(\mathbf{a} + t\,\mathbf{u} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{u} = 0$.
2. Bestimme mit dem erhaltenen t **f** durch $\mathbf{f} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u}$.
3. Berechne $\overrightarrow{FP}$ und $d = |\overrightarrow{FP}|$.

Beispiel

g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$; P: $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$

1. Bedingungsgleichung für t

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\} \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}-6\\-6\\-6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\} \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 0$$

-24 + 16 t -30 + 25 t -36 + 36 t = -90 + 77 t = 0 → t = 90/77.

2. Bestimmung von **f**

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 90/77 \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}437/77\\604/77\\771/77\end{pmatrix}.$$

3. Berechnung von $\overrightarrow{FP}$

$$\overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}437/77\\604/77\\771/77\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}102/77\\12/77\\-78/77\end{pmatrix};$$

$$d = |\overrightarrow{FP}| = \sqrt{10.404 + 144 + 6.084} / 77 = \sqrt{16.632} /77 \approx 1{,}675$$

Nachbemerkung *"Verrückte Idee"?*

Nun ergibt sich die Frage, ob die Gleichung aus der Hesse-Normalenform nicht doch gilt.

d = |(**p** - **a**)·$\mathbf{n_o}$|; $\mathbf{n_o}$ = **n** / |**n**|

Wir kennen inzwischen die "richtige" Normale, denn **n** ist unser $\overrightarrow{FP}$!

($\mathbf{n_o}$ ist auch schon berechnet.)

$$\mathbf{p} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}7-1=6\\8-2=6\\9-3=6\end{pmatrix};\ d = \left|\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}102/77\\12/77\\-78/77\end{pmatrix}\right| / (\sqrt{16.632} / 77) =$$

$$= 216/77 \cdot 77/ \sqrt{16.632} = 216/ \sqrt{16.632} \approx 1{,}675$$

Wer sich etwas wundert, weil die Wurzel oben im Zähler und unten im Nenner steht, soll getröstet werden! Einige Umformungen zeigen die Äquivalenz. $\sqrt{16.632} = 6 \cdot \sqrt{462}$, 462 = 6 · 77.

Also: Natürlich würde die Hesse-Normalenform auch gelten, aber diese benötigte "richtige" Normale konnte erst mit dem Lotfußpunkt-Verfahren gefunden werden. Nur in diesem Sinne ist die Aussage "Für den Abstand Punkt-Gerade in R^3 gilt die Hesse-Formel nicht" zu verstehen. Besser ist daher die Aussage "Für den Abstand Punkt-Gerade in R^3 ist die Hesse-Formel nicht benutzbar".

Beispiel - Sonderfall überprüfen

Folgt auch d = 0, wenn irrtümlich ein Punkt P eingesetzt wird, der auch auf g liegt?

JA! Das Verfahren beginnt mit der Bestimmung von t aus (**a** + t **u** - **p**)·**u** = 0.

Wenn P auch auf g liegt, dann gilt **p** = **a** + s **u**. Dies eingesetzt, folgt:

(**a** + t **u** - **a** - s **u**)·**u** = (t - s) **u**·**u** = 0. Wenn tatsächlich eine Gerade g vorliegt, also nicht nur ein Punkt mit dem Ortsvektor **a**, muss **u** ≠ **0** sein - und damit auch **u**·**u** ≠ 0.

Daraus folgt s = t. Der Lotfußpunkt F ist identisch zum Punkt P und der Abstand daher 0.