

Direkte Abstandbestimmung: Zwei Punkte

Hier ist selbstverständlich kein besonderes Lotfußpunkt-Verfahren nötig!

Im orthonormalen Basissystem ist der Abstand d direkt aus den Koordinaten errechenbar.

$P = (x_1 | y_1 | z_1)$, $Q = (x_2 | y_2 | z_2)$:

$$d = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

In Vektoren-Schreibweise mit den Ortsvektoren \mathbf{p} und \mathbf{q} zu den Punkten P und Q :

$$d = |(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p})|$$

Gerade- Ebene (in \mathbb{R}^3)

Eine Gerade muss irgendwo die Ebene schneiden, außer sie liegt parallel zu dieser. Dann haben alle Punkte der Geraden den gleichen senkrechten Abstand zur Ebene. Man wählt irgendeinen Punkt der Geraden und rechnet dann wie im Fall "Punkt - Ebene".

Ebene- Ebene (in \mathbb{R}^3)

Zwei Ebenen haben nur dann einen Abstand, d.h. sie schneiden sich nicht, wenn sie parallel liegen. Dann haben alle Punkte einer Ebene den gleichen senkrechten Abstand zur anderen Ebene. Man wählt irgendeinen Punkt der einen Ebene und rechnet dann wie im Fall "Punkt - Ebene".

NACHBEMERKUNG

Abstandsberechnungen sind mit "fertigen" Formeln der Vektorrechnung schnell durchführbar. Das Lotfußpunktverfahren erfordert größeren Rechenaufwand, ist aber "logisch einfacher".

Ist zur Berechnung von Abständen die Vektorrechnung unbedingt nötig?

⇒ NEIN

Man kann sich die Frage stellen, ob die Abstandsbestimmung auch ohne Vektorrechnung, nur mit Koordinaten, möglich ist. Ja, aber der Aufwand ist noch größer. Die richtigen Lotfußpunkte und damit die kleinsten Abstände können auch analytisch gefunden werden!

Aus den Koordinaten bestimmt man d oder einfacher d^2 . $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + \dots$. Dabei kann x_i die Koordinate eines speziellen Punkts sein oder die Koordinate eines allgemeinen Punkts einer Geraden. Dann fordert man, d^2 soll ein Minimum sein und löst nach einem Parameter. Für den "schwierigsten" Fall der windschiefen Geraden sind dies 2 Parameter r und t , die die Lage der Lotfußpunkte bestimmen. Das Minimum wird dabei durch die Bedingung "1. Ableitung = 0" gefunden, $d/dr(d^2) = 0$ und $d/dt(d^2) = 0$.

Diese Rechnung in allgemeiner Form durchzuführen ist sehr mühsam!

Mit einem Computer-Algebra-System ist es durchaus möglich - und bestätigt die genannte Behauptung!

Ein Zahlenbeispiel ist noch "von Hand" bearbeitbar.