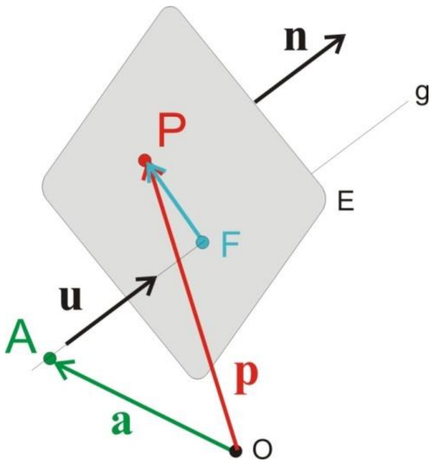
Abstandsberechnung Punkt - Gerade in R^3 (Kreuzprodukt)

Für eine Gerade in R^3 ist die Abstandsberechnung mit $(\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o} = d$ nicht möglich, weil keine Normale **n** gefunden werden kann. Eine Möglichkeit ist das "Lotfußpunkt-Verfahren". Eine andere Möglichkeit verwendet geometrische Überlegungen mit einem Kreuzprodukt von Vektoren.

Zum Vergleich: Lotfußpunkt-Verfahren

Abstand eines Punkts P von der Geraden g. Annahme: Die Gerade g ist in der Parameterform gegeben.

1. Anstelle der nicht bestimmbaren Normalen wird eine Normalenebene auf g erstellt.
   Das ist wesentlich einfacher, als man anfangs denkt!
   Der Punkt P liegt in dieser Ebene.
2. Der Schnittpunkt der Geraden g mit dieser Ebene wird errechnet.
   Dies ist der Lotfußpunkt F.
3. Der Betrag von $\overrightarrow{\mathbf{PF}}$ ist der gesuchte Abstand.



__1.__ Die Gerade g hat den Richtungsvektor **u**.
Eine dazu senkrechte Ebene E hat denselben Richtungsvektor **n** = **u**. (Keine Rechnung nötig)
Auswahl der Ebene: P liegt in der Ebene E.
Damit ist alles für die Normalenform bekannt!

E: $(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{u} = 0$

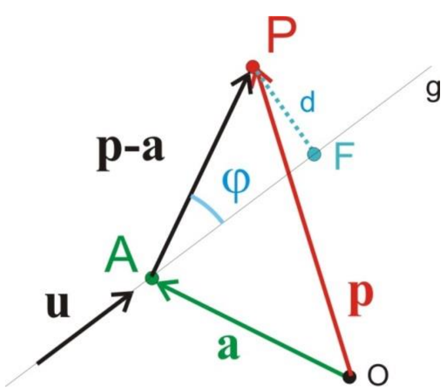
__2.__ Weil der Schnittpunkt sowohl in E als auch auf der Geraden g liegen muss, wird **x** aus g als **x** in E eingesetzt. Der Schnittpunkt F folgt aus dem Parameter t der Lösung von $(\mathbf{a} + t\cdot\mathbf{u} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{u} = 0$.

__3.__ Aus den nun bekannten Koordinaten der Punkte P und F folgt deren Abstand.

➔ Für die Rechnung ist es eventuell einfacher,
bei 2. aufzuspalten: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} + t\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{u} = 0$

Abstandsbestimmung über das Kreuzprodukt

$$\boxed{d = |(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u_o}|}$$



P hat von der Geraden g den Abstand d.
Das ist die Strecke von P zum dazugehörenden Lotfußpunkt F, $d = |\overrightarrow{PF}|$
Im rechtwinkligen Dreieck gilt
$\sin(\varphi) = d / |\mathbf{p}-\mathbf{a}|$, also $d = |\mathbf{p}-\mathbf{a}| \cdot \sin(\varphi)$.
(Wir bestimmen weder φ noch F.)
Ein "kluger Vergleich" zeigt:
$|(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u_o}| = |(\mathbf{p} - \mathbf{a})| \cdot |\mathbf{u_o}| \cdot \sin(\varphi)$
Weil $|\mathbf{u_o}| = 1$ ist damit der Abstand berechnet.

Hier gibt es also keinen Abstand mit Vorzeichen ±, wie bei den Rechnungen mit der Hesse-Normalenform. Das ist auch sinnvoll.

- Bei einer Geraden in R^2 und einer Ebene gibt es zwei Seiten für die Lage des Punkts P. Damit ist es sinnvoll, eine Rechnung durchzuführen, bei der die Orthogonalität berücksichtigt wird und die Information über die Lage erhalten bleibt.
- Bei einer Geraden in R^3 sind unendliche viele "Seiten" möglich. Eine Berechnung über die Orthogonalität scheitert an der Mehrdeutigkeit. Mit dem Kreuzprodukt wird eine Normale berechnet. Nicht der Vektor, sondern der Betrag dieses Vektors stellt den Abstand dar. Der Betrag hat nur ein + Vorzeichen.

Vorgehen

1. Zum Richtungsvektor der Geraden g wird der Einheitsvektor errechnet: $\mathbf{u_o} = \mathbf{u} / |\mathbf{u}|$.
2. $\mathbf{p} - \mathbf{a}$ wird berechnet und dann das Kreuzprodukt $(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u_o}$.
3. Der gesuchte Abstand ist der Betrag des Kreuzprodukts

Beispiel

g: $\mathbf{a} + t\,\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$; Punkt außerhalb der Gerade P: $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}-6\\7\\8\end{pmatrix}$

1. Lotfußpunktverfahren

Für die Normalenebene: $\mathbf{n} = \mathbf{u} = \begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$

E mit P als Aufpunkt: $\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\7\\8\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} = 0$

Gerade g für **x** eingesetzt: $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\7\\8\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix}7\\-5\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 16 + 50\,t = 0 \Rightarrow t = -\,8/25.$

t in g eingesetzt: F: $\mathbf{f} = \begin{pmatrix}1-{}^{24}/_{25}\\2+32/25\\3-40/25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^{1}/_{25}\\{}^{82}/_{25}\\{}^{35}/_{25}\end{pmatrix}$

Abstand d $=|\overrightarrow{\mathbf{PF}}| = \{(1/25+6)^2 + (82/25-7)^2 + (35/25-8)^2\}^{1/2} =$

$\{151^2 + (-93)^2 + (-165)^2\}^{1/2} / 25 = 58675^{1/2} / 25 \approx 9{,}689$

2. Vektorprodukt

d = $|(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u_o}|$

$|\mathbf{u}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$ (= $5\sqrt{2}$); $\mathbf{u_o} = \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -6-1=-7 \\ 7-2=5 \\ 8-3=5 \end{pmatrix}$

$(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u_o}$

Sarrus-Schema (ohne gemeinsamen Faktor $1/\sqrt{50}$)

i	**j**	**k**	**i**	**j**	**i**: 25 -(-20) = 45
-7	5	5	-7	5	**j**: 15 - (-35) = 50
3	-4	5	3	-4	**k**: 28 - (15) = 13 Kein Kürzen für "schönere" Zahlen möglich

d = $1/\sqrt{50} \cdot \{ 45^2 + 50^2 + 13^2 \}^{1/2} = 4694^{1/2} / \sqrt{50} \approx 9{,}689$

Determinanten-Entwicklung (ohne gemeinsamen Faktor $1/\sqrt{50}$)

$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -7 & 5 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 45\,\mathbf{i} + 50\,\mathbf{j} + 13\,\mathbf{k}$

Ist es fehlerhaft, wenn $(\mathbf{p} - \mathbf{a})$ und $\mathbf{u_o}$ vertauscht werden? Das Kreuzprodukt ändert dann das Vorzeichen. Weil nur der Betrag interessiert, ist das unwichtig.

Sonderfall überprüfen

Folgt auch d = 0, wenn irrtümlich ein Punkt P eingesetzt wird, der auch auf g liegt?

Wenn P auf g: $\mathbf{p} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{p} - \mathbf{a} = t\,\mathbf{u} \rightarrow d = |\mathbf{u} \times \mathbf{u_o}| \cdot |t| = 0$.
Das Kreuzprodukt zweier kollinearer Vektoren ist 0.