Abstandsberechnung Punkt - Ebene

Grundprinzip

In R^2 ist die Berechnung irrelevant. R^2 definiert (von R^3 aus gesehen) selbst eine Ebene, daher ist jeder Punkt automatisch auch in dieser Ebene.

> In R^3 ist die Anwendung der Hesse-Normalenform der sinnvolle Weg. Ein Lotfußpunkt-Verfahren macht nur dann Sinn, wenn es ausdrücklich verlangt wird!

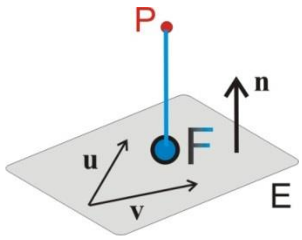
In der Durchführung wird die Normale **n** auf die Ebene benötigt.

- Diese ist direkt ablesbar, wenn die Ebene in der Normalenform oder als Koordinatengleichung gegeben ist.
- Wenn die Ebene in der Parameterform gegeben ist, kann **n** aus den beiden Richtungsvektoren **u** und **v** berechnet werden. Entweder über das Gleichungssystem **n** ⊥ **u**, **n** ⊥ **v** (Lösung mit 1 freiem Parameter) oder direkt über das Kreuzprodukt **n** = **u** x **v** (parameterfrei).

1. Lotfußpunktverfahren

Geometrisch ist die Sache einfach, die rechnerische Durchführung erfordert etwas Arbeit. Hinweis: Auch in diesem Verfahren muss **n** bestimmt werden. Hat man **n**, ist selbstverständlich die Berechnung des Abstands mit der Hesse-Normalenform viel schneller!

Der Lotfußpunkt F ist der Schnittpunkt der Geraden durch den Punkt P und mit dem Richtungsvektor **n** mit der Ebene E.



Durchführung:

1. Bestimme **n**.
2. Schnittpunkt der Lotgeraden g_L: $\mathbf{x} = \mathbf{p} + r\,\mathbf{n}$ mit der Ebene E
3. Bestimme mit dem erhaltenen r und/oder s, t (falls E in Parameterform) den Lotfußpunkt F
4. Berechne $\overrightarrow{FP}$ und d
   $F(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$, $P(x_2 \mid y_2 \mid z_2)$,
   $d = \left|\overrightarrow{FP}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Hinweis: In allen Rechnungen wird dieselbe Ebene - nur in verschiedenen Formen - eingesetzt!
Ebenso: Stets P(1|2|3)

1.1 Beispiel 1 (Ebene in der Parameterform)

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; E: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

1a. Normale **n** über Lineares Gleichungssystem $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ und $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$

$3\,n_x + 2\,n_y + n_z = 0$

$2\,n_x + n_y + n_z = 0$

freier Parameter $n_z = z$ (2 Gleichungen für 3 Unbekannte!)

$n_y = -2\,n_x - z \rightarrow 3\,n_x - 4\,n_x - 2\,z + z = 0 \rightarrow n_x = -z \rightarrow n_y = z$

$\rightarrow \mathbf{n} = \begin{pmatrix}-z\\z\\z\end{pmatrix}$, am einfachsten $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

1b. Normale **n** über Kreuzprodukt, $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

Sarrus-Schema:

i	**j**	**k**	**i**	**j**	**i**: 2 - 1 = 1
3	2	1	3	2	**j**: 2 - 3 = -1
2	1	1	2	1	**k**: 3 -4 = -1

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ (kollinear zu **n** von 1a.!)

oder Determinanten-Entwicklung:

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\3 & 2 & 1\\2 & 1 & 1\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

2. $\mathbf{p} + r\,\mathbf{n}$ in $E = \mathbf{a} + s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}$

n aus 1a eingesetzt: 1 - r = 3 + 3 s + 2 t / 2 + r = 4 + 2 s + t / 3 + r = 5 + s + t

	r	s	t	(rechte Seite)	
[1]	1	3	2	-2	
[2]	-1	2	1	-2	
[3]	-1	1	1	-2	
[1]	1	3	2	-2	
[2']	0	5	3	-4	| = [1] + [2]
[3']	0	4	3	-4	| = [1] + [3]
[1]	1	3	2	-2	
[2']	0	5	3	-4	| = [1] + [2]
[3"]	0	0	-3	4	| = 4 · [2'] - 5 · [3']

[3"]: $t = -4/3 \rightarrow$ [2']: $5s = -4 - 3 \cdot (-4/3) = 0 \rightarrow s = 0 \rightarrow$ [1]: $r = -2 - 2 \cdot (-4/3) = 2/3$

$t = -4/3$; $s = 0$; $r = 2/3$

3. Lotfußpunkt F

aus g_L: $\mathbf{f} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 2/3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\8/3\\11/3\end{pmatrix}$ oder

aus E: $\mathbf{f} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + -4/3 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\8/3\\11/3\end{pmatrix}$.

4. $\overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix}1/3\\8/3\\11/3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$; $d = \sqrt{4+4+4}\,/\,3 = 2/3 \cdot \sqrt{3}$

1.2 Beispiel 2 (Ebene in der Normalenform)

E: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = \left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$

1. $\mathbf{n}$ direkt ablesbar, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. $\mathbf{p}$ + r $\mathbf{n}$ als $\mathbf{x}$ (in E): $\mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{p} + r\,\mathbf{n} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2-r\\-2+r\\-2+r\end{pmatrix}$

   Ebenengleichung $(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$; $\begin{pmatrix}-2-r\\-2+r\\-2+r\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = 3\,r - 2 = 0$; $r = 2/3$

3. Lotfußpunkt F

   (wie im Beispiel 1) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 2/3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\8/3\\11/3\end{pmatrix}$

4. (wie im Beispiel 1) $\overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$; $d = 2/3\cdot\sqrt{3}$

1.3 Beispiel 3 (Ebene als Koordinatengleichung)

E: $-x + y + z = 6$

"Erinnerung": $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0 \rightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \rightarrow$ rechte Seite der Koordinatengleichung = $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$

1. $\mathbf{n}$ direkt ablesbar, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. $\mathbf{p}$ + r $\mathbf{n}$ als $\mathbf{x}$

   $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = (\mathbf{p} + r\,\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} + r\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$

   $\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = 4$; $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = 3$

   $r = (\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{n}\,) / \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = (6 - 4) / 3 = 2/3$

3. und 4. wie im Beispiel 2.

2. Abstandsbestimmung mit der Hesse-Normalenform

Formel: $(\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o} = d$

- E in Parameterform (PF): **a** gegeben, **n** aus **u** und **v** berechnen
- E in Normalenform (NF): **a** und **n** gegeben
- E als Koordinatengleichung (KG): **n** aus linker Seite ablesbar, rechte Seite = $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$
  Zur Berechnung am besten Umformung: $\mathbf{p}\cdot\mathbf{n_o} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n_o} = d$

Stets $\mathbf{n_o} = \mathbf{n} / |\mathbf{n}|$

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$.

PF, NF: $\mathbf{p} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$d = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \sqrt{3} = \{2 - 2 - 2\} / \sqrt{3}$; $|d| = 2/3 \cdot \sqrt{3}$

KG: $\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 6$

$d = (4 - 6) / \sqrt{3}$; $|d| = 2/3 \cdot \sqrt{3}$

3. Ergänzung: Folgt auch d = 0, wenn ein Punkt P <u>auf</u> der Ebene eingesetzt wird?

Sei P(5|5|6).

<u>Lotfußpunkt-Verfahren</u> (Rechnung wie im Beispiel 2)

2. $\mathbf{p} + r\,\mathbf{n}$ als $\mathbf{x}$ (in E): $\mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{p} + r\,\mathbf{n} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - r \\ 1 + r \\ 1 + r \end{pmatrix}$

   Ebenengleichung $(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$; $\begin{pmatrix} 2 - r \\ 1 + r \\ 1 + r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\,r = 0$; $r = 0$
3. Lotfußpunkt F: $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
4. Der Lotfußpunkt F und der Punkt P sind gleich, also ist der Abstand 0.

oder allgemein: **p** in E → Es gilt $(\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0 \rightarrow \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$
Bedingung für den Fußpunkt: $\{ (\mathbf{p} + r\,\mathbf{n}) - \mathbf{a} \}\cdot\mathbf{n} = 0$
Aufgelöst: $\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} + r\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 0 \rightarrow r\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 0 \rightarrow r = 0$ (weil $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} \neq 0$).
Also: $\mathbf{f} = \mathbf{p} + r\,\mathbf{n} = \mathbf{p}$ → Fußpunkt gleich dem Punkt P

<u>Hesse-Normalenform:</u>

$\mathbf{p} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \sqrt{3} = 0$

oder allgemein: **p** in E → Es gilt $(\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$ → damit auch $(\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o} = d = 0$