Analytische Geometrie - Gerade und Ebene in der Parameterform

1. Parameterform der Geradengleichung

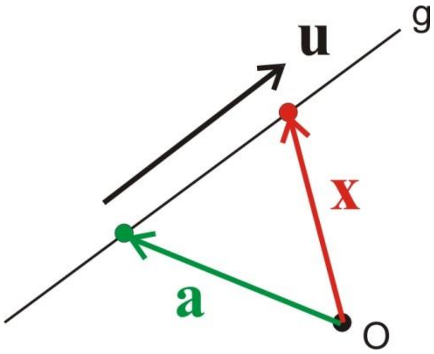
Jeden Punkt auf einer Geraden erreichen wir, indem wir von einem Aufpunkt aus ein bestimmtes Stück in einer festgelegten Richtung weitergehen. Diese allgemeine Formulierung gilt in R^2 und R^3. Für die Komponenten-Darstellung beziehen wir uns dann auf ein bestimmtes Basis-System (Koordinatensystem).

$$g: \mathbf{x} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{u}$$

x Ortsvektor zum allgemeinen Punkt von g

a Ortsvektor zum Aufpunkt A von g

u Richtungsvektor von g



u kann direkt gegeben sein oder aus 2 Punkten auf der Gerade bestimmt werden. (Einer davon darf natürlich auch der Aufpunkt A sein.) Der Vektor **a** zum Aufpunkt A wird auch "Stützvektor" genannt.

Mit den Vektoren $\mathbf{p_1}$ und $\mathbf{p_2}$ zu 2 Punkten P_1 und P_2 ist $\mathbf{u} = \mathbf{p_1} - \mathbf{p_2}$ (oder $\mathbf{u} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}$).

Jeden Punkt einer Ebene erreichen wir, indem wir von einem Aufpunkt aus jeweils ein bestimmtes Stück in zwei verschiedenen Richtungen weitergehen. Auch dies gilt in R^2 und R^3.

Anmerkung: **x** und **a** müssen Ortsvektoren sein, müssen beide vom gleichen Punkt aus starten. Vernünftigerweise ist das auch der Ursprung des Koordinatensystems. Dann sind die Vektorkoordinaten von **x** auch die gewohnten Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem. **u** ist ein freier Vektor, weil gemäß der Vorschrift für die Vektoraddition er am Ende von **a** angehängt wird. Wenn **a** nicht vom Ursprung aus startet, sondern irgendeinem anderen Punkt P, bezieht sich **x** auch auf diesen anderen Punkt P. Außer vielleicht "zur Vertiefung des Verständnisses" ist das eher Unsinn.

2. Parameterform der Ebenengleichung

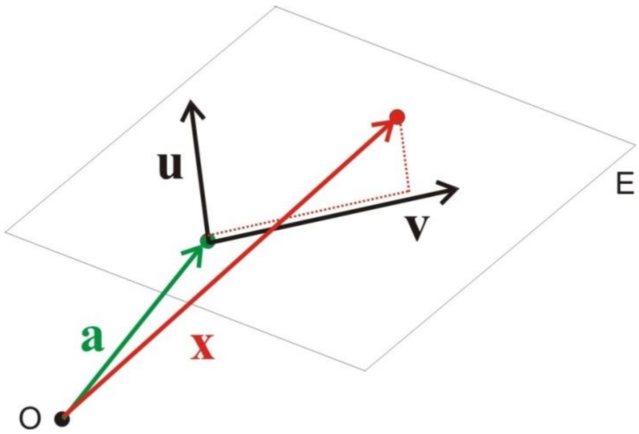
$$E: \mathbf{x} = \mathbf{a} + r \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{v}$$

x Ortsvektor zum allgemeinen Punkt von E

a Ortsvektor zum Aufpunkt A von E

u Richtungsvektor 1 von E

v Richtungsvektor 2 von E



u und **v** <u>müssen</u> dabei linear unabhängig sein! Bei linearer Abhängigkeit, also **u** = r · **v**, würden wir nur - etwas umständlich - wieder eine Gerade beschreiben. Wie bei der Geraden können **u** und **v** aus Punkten in der Ebene bestimmt werden. Mit Ortsvektoren zu den 3 Punkten P_1, P_2 und P_3 ist damit $\mathbf{u} = \mathbf{p_1} - \mathbf{p_2}$ und $\mathbf{v} = \mathbf{p_1} - \mathbf{p_3}$ (oder äquivalente Formeln mit vertauschten Punkten). Ebenso darf wieder der Aufpunkt A für einen der Punkte P_i verwendet werden.

<u>Bemerkung</u>: Für einige Anwendungen erweist sich eine andere Formulierung als vorteilhaft, die "Normalenform" nach Hesse. Der Zusammenhang mit der Parameterform wird dort angegeben.

3. Zusammenhang mit der Koordinatengleichung in $\mathbf{R}^2$

Für eine Gerade g kennen wird die "Steigungs-Form" y = m x + a, mit der Steigung m und dem Achsenabschnitt a, oder die Allgemeine Form A x + B y + C = 0.

m kann dabei aus 2 Punkten errechnet werden: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Wir definieren nun eine Koordinaten-Darstellung zu $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{u}$ und $\mathbf{u} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}$. Für den Aufpunkt A verwenden wir P_1.

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \mathbf{p_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{p_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Damit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$.

1. Komponente: $x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)$ und aufgelöst: $t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

2. Komponente: $y = y_1 + t \cdot (y_2 - y_1)$ und nach Einsetzen von t: $y = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot (y_2 - y_1)$

Geordnet ist das: $y = x \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$ (Steigungs-Form)

Multipliziert man das mit $(x_2 - x_1)$ und ordnet es um, erhält man die Allgemeine Form.

$$\begin{array}{lllll} A & \cdot x \; + & B & \cdot y \; + & C & = 0 \\ (y_2 - y_1) & \cdot x \; - & (x_2 - x_1) & \cdot y & + x_2 y_1 - x_1 y_2 & = 0 \end{array}$$

Ein konkretes Beispiel dazu auf einer eigenen Seite!

4. Zusammenhang mit der Koordinatengleichung in $\mathbf{R}^3$

⇒ Eine <u>Ebene</u> hat die Gleichung A x + B y + C z + D = 0.

4.a. Gerade

Für die Gerade gilt dasselbe, was wir auch bei der Normalenform feststellen. Es gibt keine <u>eindeutige</u> Gleichung. Man kann daher auch (vereinfacht) sagen: "Es gibt keine Koordinatenform."

Die weitere Erklärung dazu auf einer eigenen Seite! - G02

4.b. Ebene

$\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v}$

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

In Koordinaten sind das 3 lineare Gleichungen. Aus dem Gleichungssystem müssen r und s eliminiert werden. Die Angabe einer allgemeinen Lösung ist nicht sinnvoll!

Ein konkretes Beispiel dazu auf einer eigenen Seite!