Analytische Geometrie - Gerade und Ebene Parameterform ↔ Koordinatengleichung

1. Gerade (R^2)

1.1. Parameterform → Koordinatengleichung

g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{u}$ und $\mathbf{u} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}$.

$\mathbf{a} = \mathbf{p_1} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\mathbf{p_2} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$. Damit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. → g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

Steigungsform: $y = x \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \rightarrow y = x \cdot \frac{6-2}{4-1} + \frac{4 \cdot 2 - 1 \cdot 6}{4-1} \rightarrow$ g: $y = 4/3\, x + 2/3$

Allgemeine Form: $(y_2 - y_1) \cdot x - (x_2 - x_1) \cdot y + x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0$

$\quad 6 - 2 \qquad\qquad 4 - 2 \qquad\qquad 4 \cdot 2 - 1 \cdot 6$

g: $4x - 3y + 2 = 0$

♦ Wenn nur die Parameterform g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{u}$ bekannt ist, berechnet man 2 Punkte auf der Geraden, z.B. die Punkte mit den Richtungsvektoren **a** und **a** + **u.**

1.2. Koordinatengleichung → Parameterform

Die Umkehrung ist noch einfacher: 2 verschiedene x-Werte, die y-Werte dazu berechnen. Dann ein Punkt als **a** und die Differenz als **u**.

2. Ebene (R^3)

2.1. Parameterform → Koordinatengleichung

E: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v}$

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-3\\0\\-1\end{pmatrix}$

Gleichungssystem

[1] $\quad x = 4r - 3s + 1$

[2] $\quad y = 5r + 2$

[3] $\quad z = 6r - s + 3$

aus [1]: $r = (y - 2) / 5$;

$3 \cdot [3] - [1]$: $3z - x = 14r + 8$;

r eingesetzt: $3z - x = 14/5\, y - 28/5 + 8 = 14/5\, y + 12/5$

$\cdot\, 5$, um "schöne" Ganzzahlen zu erhalten: $15z - 5x = 14y + 12$

geordnet (und Vorzeichen geändert): E: $5x + 14y - 15z + 12 = 0$

2.1b. Parameterform → Koordinatengleichung

Wer Gleichungssysteme nicht liebt, kann auch anders verfahren. Dabei wird ein gedanklicher Umweg über die Normalenform benutzt. Die Normale errechnet man am schnellsten - sonst hat man trotzdem wieder ein Lineares Gleichungssystem - über das Kreuzprodukt. Und dann: Die Koeffizienten in der Koordinatengleichung sind gleich den Koordinaten der Normale!

Normale $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 4 & 5 & 6\\ -3 & 0 & -1\end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(-5) - \mathbf{j}\,(14) + \mathbf{k}\,(15) = -5\,\mathbf{i} - 14\,\mathbf{j} + 15\,\mathbf{k}$

Damit ist E: -5 x - 14 y + 15 z + D = 0

Zur Berechnung von D wird der Vektor **a** als {x,y,z} eingesetzt:

$-5 \cdot 1 - 14 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + D = 0 \rightarrow D = -12$

E: -5 x - 14 y + 15 z -12 = 0

(Mit einer Vorzeichenänderung dasselbe Resultat wie bei 2.1.)

2.2. Koordinatengleichung → Parameterform

Vorbemerkung: Wir erhalten die Gleichung einer Ebene, also 1 Aufpunkt (Stützvektor **a**) und 2 Richtungsvektoren (**u**, **v**). Wenn wir das Ergebnis von 2.1 zurückrechnen, müssen wir nicht dieselbe Gleichung erhalten. Jeder andere Punkt der Ebene kann der Aufpunkt sein, jede andere 2 Linearkombinationen aus **u** und **v** spannen genauso die Ebene auf. (Die beiden Richtungsvektoren müssen nur linear unabhängig sein.)

a) Eine Möglichkeit, die ziemlich schnell eine Lösung liefert: Zwei Variable, z.B. x und y, der Koordinatengleichung werden als Parameter r und s definiert. Dann wird nach der 3. Variablen aufgelöst. Nach "geschicktem Sortieren" kann man die gefragten Vektoren direkt ablesen.

E: $5x + 14y - 15z + 12 = 0 \rightarrow 5r + 14s - 15z + 12 = 0 \rightarrow z = 5/15\, r + 14/15\, s + 12/15$

Aus dem Ersetzen gilt: x = r und y = s

Nun sortiert:

$$\begin{aligned} x &= 0 && + 1 \cdot r && + 0 \cdot s \\ y &= 0 && + 0 \cdot r && + 1 \cdot s \\ z &= 12/15 && + 5/15 \cdot r && + 14/15 \cdot s \end{aligned}$$

Und abgelesen: $E\colon \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12/15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5/15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 14/15 \end{pmatrix}$

In den beiden Richtungsvektoren wählen wir kollineare Vektoren mit Ganzzahlen:

$$E\colon \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12/15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Das sieht nun ganz anders aus als bei 2.1. Es ist aber dieselbe Ebene!

$4/15 \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 1/3 \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{u}$ und $-3/15 \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{v}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12/15 \end{pmatrix} + 1/15 \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 2/15 \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{a}$

Die Richtungsvektoren und der Aufpunkt von 2.1. können mit der Form von 2.2. erzeugt werden.

b) Eine andere Möglichkeit ist, 3 Punkte auf der Ebene zu bestimmen und daraus **a**, **u** und **v** zu errechnen. Zur Bestimmung der Punkte können wir jeweils x und y frei wählen und z dann über die Koordinatengleichung bestimmen. Auf diese Weise:

$P_1(1 \mid 2 \mid 3)$, $P_2(9 \mid 12 \mid 15)$ und $P_3(10 \mid 2 \mid 6)$.

Für **a** P_1 gewählt. **u** aus $\overrightarrow{P_1P_2}$ und **v** aus $\overrightarrow{P_1P_3}$

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$ → das Doppelte des **u** in 2.1., also kollinear; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ → auch kollinear

Es wird eine zu 2.1. äquivalente Parameterform erhalten.

3. Gerade (R^3)

Zuerst ein Versuch, ohne die Warnung "Es gibt keine Koordinatenform" ernst zu nehmen!

$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u}$; $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

Aus dem Gleichungssystem für die drei Koordinaten muss t eliminiert werden.

$x = a_1 + t\,u_1$ / $y = a_2 + t\,u_2$ / $z = a_3 + t\,u_3$

$z = a_3 + t \cdot u_3$ liefert $t = (z - a_3) / u_3$

Setzt man das in die 1. und 2. Gleichung ein und addiert, folgt nach Ordnen

$x \cdot (-u_3) + y \cdot (-u_3) + z \cdot (u_1 + u_2) + \{ a_1 u_3 - u_1 a_3 + a_2 u_3 - u_2 a_3 \} = 0$

Gibt es doch eine allgemeine Lösung?
Für die weitere Diskussion ist es aber sinnvoller, mit Zahlenwerten für die Koordinaten fortzufahren!

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Damit $x \cdot (-7) + y \cdot (-7) + z \cdot 9 + (-6) = 0 \rightarrow g\colon 7x + 7y - 9z + 6 = 0$

Wir könnten nun stundenlang probieren, und wir würden finden, dass diese Koordinatengleichung für <u>alle</u> Punkte gilt, die wir mit der Parameterform berechnen.

1. "Aber": Wir finden, dass auch <u>andere</u> Punkte die Gleichung erfüllen. Und diese Punkte liegen nicht auf der Geraden, wenn wir die Parameterform verwenden! z.B. (11|1|10) und (12|18|24).

2. "Aber": Schon bei der Auflösung der allgemeinen Form können wir eine andere Gleichung erhalten, wenn wir die erste Substitution "t = ..." für die x- und nicht die z-Koordinate vornehmen: $3x - y - z + 2 = 0$

Zum 1. "Aber": $Ax + By + Cz + D = 0$ ist in R^3 die Gleichung einer Ebene. In unserem Fall ist die Ebene so konstruiert, dass g in ihr liegt. Dann liegen natürlich alle Punkte, die auf g liegen, auch in E. Dazu kommen aber alle Punkte, die in E und nicht auf g liegen.

Zum 2. "Aber": Wenn wir um g herum drehen, gibt es unendlich viele Ebenen, die alle g enthalten. Unser erstes Ergebnis war demnach eine Zufallsauswahl einer davon.

Es macht keinen Sinn

- eine Koordinatengleichung zu formulieren, die zwar alle Punkte der Geraden liefert, aber noch unendlich viele andere dazu.
- für 1 Problem unendlich viele Möglichkeiten als Lösungsgleichung anzubieten.

! Weil "$Ax + By + Cz + D = 0$" in R^3 eine Ebene beschreibt, ist es sinnlos, dies auf eine Gerade anzuwenden - auch wenn damit alle Punkte auf der Geraden beschrieben werden könnten.