**Analytische Geometrie - Die Normale**

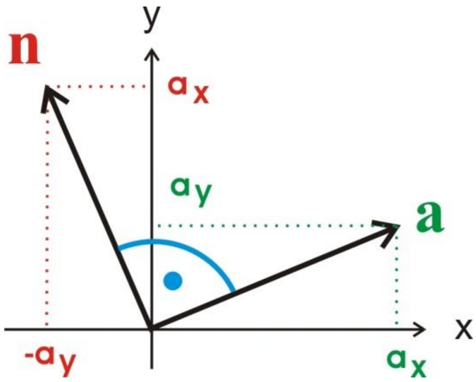
Die Normale **n** steht senkrecht auf einem anderen Objekt (Vektor oder Ebene).
Häufig wird auch der Einheitsvektor $\mathbf{n_o}$ = **n** / |**n**| benutzt.

## 1. Normale auf einer Geraden

### 1.1. In $R^2$

In $R^2$ gibt einen Vektor, der senkrecht auf einer Geraden steht. Wo dieser Vektor **n** angesetzt wird, ist unerheblich. Als (freier) Vektor kann er beliebig verschoben werden. Weil eine Normale auf beiden Seiten zu einer Gerade stehen kann, ist **-n** auch eine Normale. Ebenso ist jeder weitere kollineare Vektor t·**n** eine Normale.

Mit der Bedingung **n**·**a** = 0 ist zu **a** = $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$
eine Normale **n** = $\begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$.
Denn **n**·**a** = - $a_x$ $a_y$ + $a_y$ $a_x$ = 0.




Dass dies mehr als "gut geraten" ist, zeigt eine Skizze. **n** entsteht aus **a** durch eine Drehung um 90° und steht damit, wie gefordert, senkrecht auf **a**.

*<u>Hinweis</u>*: Das, d.h. die Formel für die Koordinaten, ist schnell hingeschrieben, gilt aber nur mit einer orthonormalen Basis! Es ist für geometrische Anwendungen üblich, stets die orthonormale Standardbasis zu verwenden, sofern nicht ausdrücklich etwas Anderes genannt ist. Eine allgemeinere Formulierung für die Koordinaten in einer beliebigen Basis ist demnach "übertriebener Formalismus" für die Analytische Geometrie in der üblichen Form.

Für eine Gerade in der Parameterform ist die Normale auf dem Richtungsvektor **u** = $\begin{pmatrix} u_x \\ y_y \end{pmatrix}$
gesucht, und damit ist die Normale **n** = $\begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$.

*<u>Beispiel</u>*: Zu **a** = $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist **n** = $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

### 1.2. In $R^3$

In $R^3$ ist die Situation anders. Anschaulich sehen wir, dass es unendlich viele Vektoren gibt, die alle senkrecht auf einer Geraden stehen. Es gibt also nicht <u>eine</u> Normale, sondern eine Ebene, die senkrecht auf der Geraden steht.
Am elegantesten ist dann, für die Ebene die Normalenform zu verwenden.

## 2. Normale auf einer Ebene (trivialerweise nur in $R^3$)

### 2.1. In $R^2$

Anschaulich wird man vielleicht argumentieren: Wenn ich ein Blatt Papier vor mich hinlege, habe ich eine Ebene in zwei Dimensionen. Und ich kann natürlich dazu eine Senkrechte konstruieren. Das stimmt. ABER: Damit verlassen wir den Raum $R^2$. Wenn die Sache dreidimensional betrachtet wird, dann gibt es die Normale auf einer Ebene.
$\Rightarrow$ Innerhalb des Vektorraums $R^2$ ist die Normale nicht definiert!

### 2.2 In $R^3$

Die Normale steht senkrecht auf 2 nicht linear abhängigen Vektoren in der Ebene, **a** und **b**. Am zweckmäßigsten verwendet man für **a** und **b** die beiden Richtungsvektoren der Parameterform, **u** und **v**. (Diese <u>müssen</u> ja linear unabhängig sein!)

Die Bedingung **n** $\perp$ **u** und **n** $\perp$ **v** löst man über
a) das Lineare Gleichungssystem für die Koordinaten
b) das Kreuzprodukt.

a) Als Bedingung gilt dann: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0$ und $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0$.
In Komponenten ist das:
$n_x u_x + n_y u_y + n_z u_z = 0$
$n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z = 0$
Das sind 2 lineare Gleichungen für 3 Unbekannte. Eine dritte Bedingung ist einzuführen.
Eine Möglichkeit ist, einen freien Parameter für eine Koordinate, z.B. $n_z$, festzulegen.
Eine andere Möglichkeit ist, zu fordern, das **n** normiert ist, also $|\mathbf{n}| = 1$.

b) Das Vektorprodukt steht durch die Definition senkrecht auf 2 anderen Vektoren.
$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
Diese Lösung ist parameterfrei.
Für eine spezielle Wahl des Parameters in Weg a) folgt auch **n** aus Weg b).

Beispiel: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}4\\5\\7\end{pmatrix}$.

**1. Über das Kreuzprodukt**

**a) u** x **v** mit dem Schema nach Sarrus:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **i** | **j** | **k** | **i** | **j** | **i**: + 2·7 - 5·3 = 14 - 15 = -1 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | **j**: + 3·4 - 7·1 = 12 - 7 = 5 |
| 4 | 5 | 7 | 4 | 5 | **k**: + 1·5 - 4·2 = 5 - 8 = -3 |

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix}-1\\5\\-3\end{pmatrix}$.

Kontrolle: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0$: $1 \cdot -1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot -3 = 0$; : $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0$: $4 \cdot -1 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot -3 = 0$

b) **u** x **v** über die Entwicklung der Determinante

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot (-1) - \mathbf{j} \cdot (-5) + \mathbf{k} \cdot (-3) =$$

$$= -\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

**2. Über das Gleichungssystem für die Koordinaten**

[1] **n · a**: $1 \cdot n_x + 2 \cdot n_y + 3 \cdot n_z = 0$

[2] **n · b**: $4 \cdot n_x + 5 \cdot n_y + 7 \cdot n_z = 0$

3. Bedingung: freier Parameter $n_z = t$.

Aus [1] $n_x = -2\,n_y - 3\,t$; dies in [2]: $-8\,n_y - 12\,t + 5\,n_y + 7\,t = -3\,n_y - 5\,t = 0$.
$n_y = -5/3\,t$; $n_x = 10/3\,t - 3\,t = 1/3\,t$.

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} {}^{1}\!/_{3}\ t \\ -{}^{5}\!/_{3}\ t \\ t \end{pmatrix}$$

<u>*Mit dem Kreuzprodukt*</u> erhält man einen speziellen Vektor **n**.
|**n**| ist dann gleich der Fläche des Parallelogramms mit den Seiten |**u**| und |**v**|.

<u>*Mit dem Gleichungssystem*</u> erhält man eine Parameterformulierung aller möglichen kollinearen Vektoren. Jeder dieser kollinearen Vektoren erfüllt die Forderung, dass er senkrecht auf der Ebene durch **u** und **v** steht. Für die spezielle Wahl t = -3 folgt daraus auch der vorher mit dem Kreuzprodukt berechnete Vektor **n**.