Analytische Geometrie - Normalenform (Gerade und Ebene)

Eine Gerade und eine Ebene können mit einer Parameter- und einer Normalenform beschrieben werden.

Anstelle von "Normalenform" wird auch häufig "Normalform" benutzt. "Normalform" könnte an etwas "Normales" erinnern, "Normalenform" weist schon im Namen darauf hin, dass eine Normale Verwendung findet.

Die Gleichung hat stets (Gerade oder Ebene) dasselbe Aussehen:

$$\boxed{(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0}$$

Für eine Gerade in R^2 und eine Ebene in R^3 kann die Koordinatendarstellung der Normalen aus den Richtungsvektoren errechnet werden.

Für eine Gerade in R^3 gilt zwar auch die Gleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$! ABER: Eine eindeutige Koordinatendarstellung der Normalen ist nicht zu finden. (Man kann nur eine eindeutige Normalenebene angeben.)

Wer behauptet, die Gleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$ gilt für eine Gerade in R^3 nicht, hat etwas verwechselt. Wer behauptet, die Gleichung ist nicht anwendbar, hat Recht! In <u>diesem</u> Sinne ist der Satz, "es gibt keine Normalenform", zu verstehen.

Ebene in R^2: Eine Normale ist im Raum R^2 nicht definiert.

Man kann die Vektoren in R^3 transformieren, mit jeweils einer z-Koordinate z = 0. Dann zeigt die Normale in die z-Richtung. Damit erzeugt man den Fall "Ebene in R^3".

Nach Hesse wird anstelle von **n** der Einheitsvektor $\mathbf{n_o} = \mathbf{n} / |\mathbf{n}|$ eingesetzt. Als Gleichung für die Gerade oder Ebene ist das ohne Bedeutung. In der Erweiterung auf Abstandsprobleme <u>muss</u> aber $\mathbf{n_o}$ eingesetzt sein. Daher die Angabe:

Hesse Normalenform

$$\boxed{(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o} = 0}$$

(Andere Namen sind auch üblich: "Hesse'sche Normalenform" oder "Hesse'sche Normalform".)

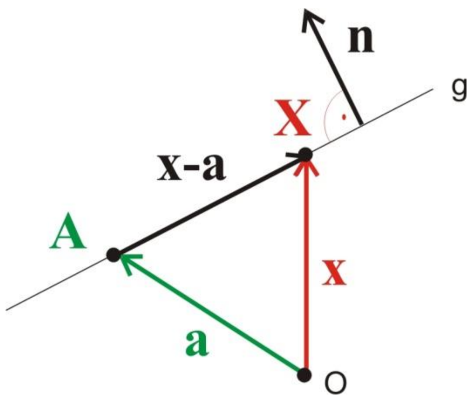
A HERLEITUNG

Die Formel für die Normalenform ist mit einer kleinen Skizze leicht einzusehen:

Gerade (R^2):

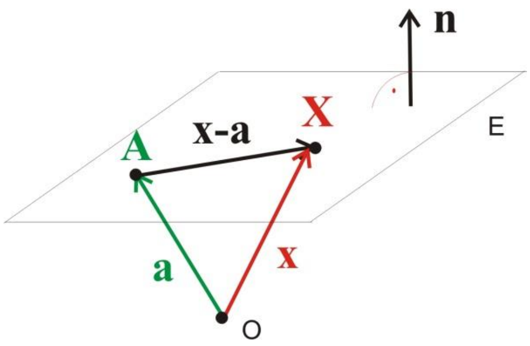
Der Vektor **x-a** vom Aufpunkt A zum allgemeinen Punkt X liegt in der Geraden g und steht senkrecht auf der Normalen **n**.

UND:
Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt der beiden Null ist.



Für eine *Ebene (R^3)* gilt dasselbe:

Auch hier liegt der Vektor
x-a
in der Ebene E
und ist damit auch
senkrecht auf dem Normalenvektor **n**



Wozu ist das sinnvoll?

Als Erstes gilt wohl: Kluge Leute (Hesse) haben das herausgefunden und darum benutzen wir es.

$\Rightarrow$ Eine Erweiterung dieser Idee (Hesse) führt zu eleganten Formeln, um Abstandsprobleme zu lösen!

B ZUSAMMENHANG mit anderen Formen

Normalenform $\leftrightarrow$ Parameterform

1. Gerade in R^2

Parameterform.: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u}$

Normalenform.: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$

Der Ortsvektor für den Aufpunkt **a** kann in beiden Formen gleich gewählt werden.

u und **n** enthalten eine "Vertauschung" der Koordinaten. (Das liefert am schnellsten <u>eine</u> Möglichkeit. Jeder andere kollineare Vektor ist natürlich ebenfalls möglich.)

$\mathbf{u} = \binom{u_x}{u_y} \Leftrightarrow \mathbf{n} = \binom{-u_y}{u_x}$

2. Ebene in R^3

Parameterform: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v}$

Normalenform: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$

Der Ortsvektor für den Aufpunkt **a** kann in beiden Formen gleich gewählt werden.

2.1 Parameterform $\rightarrow$ Normalenform:

a) 2 lineare Gleichungen $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$ und $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$ und ein freier Parameter für eine dritte Koordinate von **n**.

b) Kreuzprodukt $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

2.2 Normalenform $\rightarrow$ Parameterform:

"Geschicktes Raten" - damit $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$ und $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$ gilt.

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -n_y \\ n_x \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -n_z \\ n_y \end{pmatrix}$

Normalenform ↔ Koordinatengleichung

1. Bestimmung der Normalen

Dabei ist für beide Umformungen kein Rechnen, sondern nur "Ablesen" erforderlich!

1.a Gerade in R^2

Eine Gerade wird als Koordinatengleichung durch A x + B y + C = 0 beschrieben werden.

Ohne irgendeine Rechnung kann **n** sofort angegeben werden! **n** folgt aus den Koeffizienten!

$\mathbf{n} = \binom{A}{B}$

"Beweis": $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0 \rightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$

Dann wird in Komponenten ausmultipliziert.

Wir verwenden $\mathbf{x} = \binom{x}{y}$, $\mathbf{a} = \binom{a_x}{a_y}$, $\mathbf{n} = \binom{n_x}{n_y} = \binom{A}{B}$,

Damit: $x\cdot n_x + y\cdot n_y = a_x\cdot n_x + a_y\cdot n_y \rightarrow A\,x + B\,y = A\,a_x + B\,a_y$.

Die linke Seite enthält die Variablen x und y des allgemeinen Punkts, die rechte Seite nur Konstanten. (Das entspricht dann -C der Koordinatengleichung.)

1.b Ebene in R^3

Koordinatengleichung: A x + B y + C z + D = 0.

Ohne irgendeine Rechnung: $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

"Beweis": Analog zu 1.a.

$(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0 \rightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \rightarrow$ Komponenten ausmultipliziert

$x\cdot n_x + y\cdot n_y + z\cdot n_z = a_x\cdot n_x + a_y\cdot n_y + a_z\cdot n_z \rightarrow A\,x + B\,y + C\,y = A\,a_x + B\,a_y + C\,a_z$.

Die linke Seite enthält die Variablen x, y und z des allgemeinen Punkts, die rechte Seite nur Konstanten. (Das entspricht dann -D der Koordinatengleichung.)

2. Bestimmung des Aufpunkts bzw. der Konstanten C oder D

Normalenform → Koordinatengleichung

Der Aufpunkt ist bekannt, Ortsvektor **a**.

Die Koordinaten von **a** werden als {x,y,z} eingesetzt. Damit errechnet man die Konstante C (für g) bzw. D (für E).

Koordinatengleichung → Normalenform

Der Aufpunkt A muss auf der Geraden bzw. in der Ebene liegen. Der Stützvektor **a** ist dann der Ortsvektor zu diesem Punkt. Hier hilft entweder langes Probieren - einen Punkt suchen, der die Koordinatengleichung erfüllt - oder, wesentlich schneller, "geschicktes Raten": Man setzt eine (für g) bzw. zwei Koordinaten (für E) ein und berechnet mit der Koordinatengleichung die verbliebene Koordinate!