Analytische Geometrie - Beispiele Umrechnung Formen (g,E)

Koordinatengleichung ↔ Parameterform, Normalenform

KG = Koordinatengleichung **(PF = Parameterform, NF = Normalenform)**

1. Gerade in R^2: ☑ Ax + Bx + C = 0

2. Gerade in R^3: ☒ Keine eindeutige Formel möglich

3. Ebene in R^2: ☒ Nicht definiert

4. Ebene in R^3: ☑ Ax + By + Cz + D = 0

! Unendlich viele Möglichkeiten mit Koordinaten - siehe G05.

1. Gerade in R^2

- KG→ NF g: 2 x + 3 y -4 = 0

  Aus den Koeffizienten ist **n** direkt ablesbar. Ansatz für **a**: $\mathbf{a} = \binom{a_x}{0}$

  (Offenkundig wieder eine "spezielle" Wahl)

  sofort: $\mathbf{n} = \binom{2}{3}$. **a** eingesetzt: $2\,a_x + 3 \cdot 0 = 4 \Rightarrow a_x = 2$. Also $\mathbf{a} = \binom{2}{0}$.

  $\Rightarrow$ g: $\left[\binom{x}{y} - \binom{2}{0}\right] \cdot \binom{2}{3} = 0$

  Wenn die Form **x·n** = **a·n** gewünscht ist: Auch **a·n** ist direkt ablesbar

  (gleich -C in Ax + By + C = 0) g: $\binom{x}{y} \cdot \binom{2}{3} = 4$

- KG→ PF g: 2 x + 3 y -4 = 0

  am einfachsten: 2 Punkte berechnen und daraus **a** und **u** bilden.

  P_1: $x = 5 \rightarrow y = -4 \rightarrow P_1 = (5|-2)$; P_2: $x = -4 \rightarrow y = 4 \rightarrow P_2 = (-4|4)$

  a aus P_1, **u** aus $P_2 - P_1$

  $\Rightarrow$ g: $\mathbf{x} = \binom{5}{-2} + t\binom{-4-5}{4-(-2)} = \binom{5}{-2} + t\binom{-9}{6}$

- NF→ KG g: $\left[\binom{x}{y} - \binom{2}{0}\right] \cdot \binom{2}{3} = 0$

  Die Koordinaten von **n** liefern direkt die Koeffizienten.

  C durch Einsetzen des bekannten Punkts **a**

  $Ax + Bx + C = 0 \rightarrow 2\,x + 3\,y + C = 0 \rightarrow 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + C = 0 \rightarrow C = -4$

  Wenn **x·n** = **a·n** vorliegt, ist C = - **a·n**

  $\Rightarrow$ g: 2 x + 3 y - 4 = 0

- PF→ KG g: $\mathbf{x} = \binom{5}{-2} + t\binom{-9}{6}$

  Gleichungssystem: t eliminieren

  $x = 5 - 9t \wedge y = -2 + 6\,t \rightarrow t = 5/9 - x/9 \rightarrow y = -2 + 10/3 - 2/3\,x \rightarrow \cdot 3$ und geordnet:

  $\Rightarrow$ g: 2 x + 3 y - 4 = 0

2. Ebene in R^3

- KG→ NF E: $2x + 3y + 4z - 5 = 0$

  n direkt aus den Koeffizienten; **a** hat 2 freie Parameter, die "geschickteste" Wahl ist 0.

  $a_y = a_z = 0$. Eingesetzt: $2a_x + 0 + 0 - 5 = 0 \rightarrow a_x = 5/2$

  $$\Rightarrow \text{E: } \left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \text{ oder } \mathbf{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5$$

  Wenn **x·n** = **a·n** gewünscht ist, kann auch **a·n** = - (-5) direkt abgelesen werden.

- KG→ PF E: $2x + 3y + 4z - 5 = 0$

  Hinweis: Wenn wir für einen Punkt auf der Ebene 2 Koordinaten frei wählen, legt die Koordinatengleichung die verbleibende dritte Koordinate fest.

  Mehrere Lösungsmöglichkeiten!

  a) Logisch einfach: 3 Punkte berechnen, einen davon für **a** verwenden, die Differenz der beiden anderen zur Berechnung von **u** und **v**. Durch eine geschickte Wahl der freien Koordinaten wird die Berechnung vereinfacht: Jeweils zweimal 0 wählen.

     Wenn zwei Koordinaten auf 0 gesetzt werden, betrachtet man den Schnittpunkt mit einer Koordinatenachse. Man nennt dies auch einen Spurpunkt.

     Hinweis: Natürlich nicht <u>zweimal</u> dieselben Koordinaten nullsetzen!
     Dann würden **u** und **v** linear abhängig.
     u und **v** <u>müssen</u> aber linear unabhängig sein.

  b) Wieder die Idee der freien Koordinaten "trickreich" anwenden! Ein Punkt auf der Ebene P(x|y|z) wird als P(r|s|z) angesetzt. Einsetzen in die Koordinatengleichung liefert dann eine Bedingung für z. z hängt dann von r und s ab. Wenn man das Ergebnis "schön geordnet" anschreibt, kann man **a**, **u** und **v** direkt ablesen!

  c) Logisch richtig, aber nur schnell unter Verwendung von "Tricks":
     1. Die Koeffizienten der Koordinatengleichung liefern direkt die Normale **n**.
     2. Ein Aufpunkt A wird "erraten". Als "Trick" dabei $a_x = a_y = 0$.
        a_z aus der Koordinatengleichung errechnen.
     3. **u** und **v** aus **n** ⊥ **u** und **n** ⊥ **v**. Anstelle einer längeren Rechnung den "Trick" benutzen, dass **u** und **v** durch "gut geratene" Vertauschung der Koordinaten von **n** angeschrieben werden können. (Die Alternativen "Lineares Gleichungssystem" oder "Kreuzprodukt" sind auch möglich, erfordern aber mehr Rechenaufwand.)

  BEACHTEN:
  Wegen der verschiedenen Rechenwege folgen auch scheinbar verschiedene Lösungen!
  <u>Verschiedene</u> Gleichungen beschreiben <u>dasselbe</u> Objekt!

a) $P_1(x|0|0) \to$ in KG: $2 \cdot x + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 5 = 0 \to P_1(5/2\ |0|0)$
$P_2(0|y|0) \to$ in KG: $2 \cdot 0 + 3 \cdot y + 4 \cdot 0 - 5 = 0 \to P_2(0|\ 5/3\ |0)$
$P_3(0|0|z) \to$ in KG: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot z - 5 = 0 \to P_3(0|0|\ 5/4\ )$

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (aus P_1); $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 0 \\ 5/4 \end{pmatrix}$

für die Endform "schönere" Zahlen in **u** und **v**

$\Rightarrow$ E: : $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $P(r|s|z)$ in KG: $2\,r + 3\,s + 4\,z - 5 = 0 \to z = 5/4 - 1/2\,r - 3/4\,s$
Damit folgt das Gleichungssystem für die Koordinaten, das hinterher in Vektorform geschrieben wird.

$$\begin{array}{llll} x = & 0 & + 1 \cdot r & + 0 \cdot s \\ y = & 0 & + 0 \cdot r & + 1 \cdot s \\ z = & 5/4 & - 1/2 \cdot r & -3/4 \cdot s \end{array}$$

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}$ oder mit "schöneren" Zahlen für **u** und **v**

$\Rightarrow$ E: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) 1. KG: $2\,r + 3\,s + 4\,z - 5 = 0 \to \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. $A(0|0|z) \to$ in KG: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot z - 5 = 0 \to A(0|0|5/4)$

3. "gut geraten": $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \to \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -n_y \\ n_x \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -n_z \\ n_y \end{pmatrix} \to \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ E: : $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

♦ NF$\to$ KG E: $\left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

Die Koordinaten von **n** liefern direkt die Koeffizienten.
D durch Einsetzen des bekannten Punkts **a** (oder direkt, falls **x·n** = **a·n** gegeben)
$Ax + Bx + Cz + D = 0 \to 2\,x + 3\,y + 4\,z + D = 0 \to 2 \cdot 5/2 + 0 + 0 + D = 0 \to D = -5$
$\Rightarrow$ E: $2\,x + 3\,y + 4\,z - 5 = 0$

♦ PF→ KG

Am schnellsten ein "kleiner Umweg": PF → NF → KG

Wir benötigen nicht die ganze Normalenform, sondern nur die Normale **n**.

Dazu entweder die Parameterlösung zu **n** ⊥ **u** und **n** ⊥ **v** oder

die parameterfreie Lösung **n** = **u** x **v**.

BEACHTEN: Bei der Umrechnung KG→PF werden je nach dem benutzten Verfahren verschiedene Gleichungen erhalten. Bei der Umrechnung PF→KG sollten aber verschiedene Parameterformen derselben Ebene immer die gleiche Koordinatengleichung liefern.

a) E: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$: $-3 \cdot n_x + 2 \cdot n_y + 0 \cdot n_z = 0$

   $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$: $-2 \cdot n_x + 0 \cdot n_y + 1 \cdot n_z = 0$ freier Parameter $n_z = t$

   $n_x = 1/2\ t \rightarrow n_y = 3/4\ t$

   $\mathbf{n} = t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{n} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

   $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$

2. Mit **n**: $2x + 3y + 4z + D = 0 \rightarrow$ P einsetzen: $2 \cdot 5/2 + 0 + 0 + D = 0 \rightarrow D = -5$

⇒ E: $2x + 3y + 4z - 5 = 0$

b) E: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

1. $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 8\,\mathbf{k}$

2. gekürzt $\mathbf{n} = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k} \rightarrow$ in KG: $2x + 3y + 4z + D = 0$

   P eingesetzt: $0 + 0 + 4 \cdot 5/4 + D = 0 \rightarrow D = -5$

⇒ E: $2x + 3y + 4z - 5 = 0$

c) E: : $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 6\,\mathbf{i} + 9\,\mathbf{j} + 12\,\mathbf{k}$

2. gekürzt $\mathbf{n} = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k} \rightarrow$ und weiter wie bei b): $D = -5$

⇒ E: $2x + 3y + 4z - 5 = 0$