Lagebeziehungen: Punktprobe

Der Fall "Liegt ein Punkt auf einem anderen" ist trivial: Es ist derselbe Punkt oder nicht!

Ein Punkt liegt auf einer Geraden oder einer Ebene, wenn er beim Einsetzen die entsprechende Gleichung erfüllt. Der Rechenaufwand hängt von der vorliegenden Form der Gleichung für g oder E ab. "Punktprobe" beschreibt die durchzuführende Rechnung gut.

1. Punkt / Gerade

1.1. g in Parameterform

P: Ortsvektor **p**; g: Parameterform **x** = **a** + t **u**.
Es muss gelten: **p** = **a** + t **u**. Eine Koordinate liefert einen Wert t. Dieser Wert muss dann auch für die anderen Koordinaten gelten. (1 Bedingung für R^2 und 2 Bedingungen für R^3.)

Anmerkung: Alternativ kann man für jede Koordinate das t berechnen. Nur wenn alle t denselben Wert haben, liegt der Punkt auf der Geraden.

Beispiel (R^2): g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$: 1 + 2 t = 4 ⇒ t = 3/2; Probe: 3 + 3/2 · 4 = 9 ☑ ⇒ P liegt auf g

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$: 1 + 2 t = 4 ⇒ t = 3/2; Probe: 3 + 3/2 · 4 = 9 ☒ ⇒ P liegt nicht auf g

Beispiel (R^3): g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix}$
t aus Koordinate 1: 1 + 2 t = -3 ⇒ t = -2
Probe Koordinate 2: 3 + -2 · 4 = -5 ☑
Probe Koordinate 3: 5 + -2 · 6 = -7 ☑ ⇒ P liegt auf g

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix}-3\\5\\-7\end{pmatrix}$
t aus Koordinate 1: 1 + 2 t = -3 ⇒ t = -2
Probe Koordinate 2: 3 + -2 · 4 = -5 ☒
Probe Koordinate 3: 5 + -2 · 6 = -7 ☑ ⇒ P liegt nicht auf g
(Beide Bedingungen, nicht nur eine, müssen erfüllt sein!)

1.2 g in Normalenform

- **R^2**: Es gibt eine eindeutige Normale.
  Der Punkt wird für **x** in die Gleichung (**x** - **a**)·**n** eingesetzt.
- **R^3**: Es gibt keine Normalenform". (Keine eindeutige Normale)

Beispiel (R^2): g: $\left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} = 0$; **p** für **x** eingesetzt:

$\left[\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ = -12 + 12 = 0 ⇒ ☑ P liegt auf g

1.3 g als Koordinatengleichung

- **R^2**: P(x|y) wird eingesetzt.
- **R^3**: Es gibt keine Koordinatengleichung.

Beispiel (R^2): g: 2 x - 4 y + 6 = 0; P(7|5); P in g eingesetzt:
2 · 7 - 4 · 5 + 6 = 0 ⇒ ☑ P liegt auf g

1.4 ERGÄNZUNG - ersetzt nicht die vorgeschlagenen Verfahren 1.1 und 1.2!

Es ist möglich, bei bekanntem Richtungsvektor **u** über ein Skalar- bzw. ein Vektorprodukt die Punktprobe durchzuführen. Dabei kommen Überlegungen vor, die auch für die Abstandsbestimmung benutzt werden. P liegt auf g, E bedeutet auch, Abstand = 0. Vom Rechenaufwand her sind diese Verfahren nicht kürzer als die vorgeschlagenen!

- In **R^2** ist die Normale **n** einfach aus **u** bestimmbar. (**x** - **a**) ⊥ **n**.
- **R^2 und R^3**: **x** - **a** ist kollinear zu **u**. Damit ist (**x** - **a**)·**u** = |(**x** - **a**)|·|**u**| weil cos(0) = 1.
- **R^3**: Ebenfalls ist (**x** - **a**) x **u** = **0**. Der Betrag des Kreuzprodukts ist 0 wegen sin(0) = 0. Oder: Nur ein Nullvektor hat den Betrag 0 (Wurzel aus der Summe von Koordinaten-Quadraten!).

Für die Punktprobe wird jeweils **p** als **x** eingesetzt.

Zahlenwerte des Beispiels aus 1.1 (R^2)

g: $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{n} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$; $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \perp \mathbf{n} \Rightarrow (\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$: $\left[\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} = -12 + 12 = 0 \Rightarrow$ ☑ P liegt auf g

Das sieht gleich aus wie oben, bei 1.2. Das ist kein Zufall! Genau diese Idee, die Orthogonalität von **x** - **a** zu **n** wird in der Herleitung der Normalenform benutzt!

Zahlenwerte des Beispiels aus 1.1 (R^3)

g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$; P: $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix}$

a) Überprüfung auf Kollinearität mit (**x** - **a**)·**u** = |(**x** - **a**)|·|**u**|

$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = 8 + 32 + 72 = 112$

$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{16 + 64 + 144} = \sqrt{224}$; $|\mathbf{u}| = \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{56}$

$|(\mathbf{x} - \mathbf{a})| \cdot |\mathbf{u}| = \sqrt{224 \cdot 56} = 112 \Rightarrow$ ☑ P liegt auf g

b) Überprüfung auf Kollinearität mit (**x** - **a**) x **u** = **0**

Berechnung des Kreuzprodukts mit dem Sarrus-Schema oder mit einer Determinante.

Sarrus-Schema:

i	**j**	**k**	**i**	**j**	**i**: + 8·6 - 4·12 = 48 - 48 = 0
4	8	12	4	8	**j**: + 12·2 - 6·4 = 24 - 24 = 0
2	4	6	2	4	**k**: + 4·4 - 2·8 = 16 - 16 = 0

Determinanten-Entwicklung:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt ist **0** (Nullvektor) ⇒ ☑ P liegt auf g

2. Punkt / Ebene

2.1. E in Parameterform

$$E: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}; \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 98 \\ -125 \\ 164 \end{pmatrix}$$

Ein Paar {r, s} muss für alle drei Koordinaten gelten!

Hier: x- und y-Koordinate zur Berechnung, z-Koordinate als Kontrolle.

[1]	1 + 2 r - 7s = 98	
[2]	3 - 4 r + 8 s = -125	
[1']	2 r - 7s = 97	| geordnet
[2']	- 4 r + 8 s = -128	| geordnet
[1"]	4 r - 14s = 194	| = [1'] · 2
[2"]>	-6 s = 66	| = [1"] +[2']
⇒ s = -11; s in [1']:		2 r + 77 = 97 ⇒ r = 10

Probe z-Koordinate: 5 + 10 ·6 + (-11) · (-9) = 164 ☑ ⇒ P liegt in der Ebene

2.2 E in Normalenform

(dieselbe Ebene wie bei 2.1)

$$E: \left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0; \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 98 \\ -125 \\ 164 \end{pmatrix} \to \mathbf{p} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 97 \\ -128 \\ 159 \end{pmatrix}$$

(**p** - **a**)·**n** = 1 · 97 + 2 · (-128) + 1 · 159 = 0 ☑ ⇒ P liegt in der Ebene

2.3 E als Koordinatengleichung

(dieselbe Ebene wie bei 2.1)

E: x + 2 y + z - 12 = 0; P(98|-125|164) → P eingesetzt: 98 -250 + 164 -12 = 0

☑ ⇒ P liegt in der Ebene

2.4 ERGÄNZUNG: Normale aus der Parameterform berechnen.

Die Lösung nach 2.2 (Normalenform) die schnellste Möglichkeit für die Punktprobe. Wenn **u** und **v** gegeben ist, berechnet man **n** und setzt mit Weg 2.2 fort.

Berechnung von **n**:

- Das Kreuzprodukt liefert eine parameterfreie Lösung
- Ein Lineares Gleichungssystem liefert eine Lösung mit 1 freiem Parameter

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$ (**u** und **v** von 2.1)

- **u** x **v** Sarrus-Schema

i	**j**	**k**	**i**	**j**	**i**: 36 - 48 = -12
2	-4	6	2	-4	**j**: -42 - (-18) = -24
-7	8	-9	-7	8	**k**: 16 - 28 = -12

n = $\begin{pmatrix} -12 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$ und mit "schönen" Zahlen **n** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **u** x **v** Determinanten-Entwicklung

$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -7 & -9 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}$ = -12 **i** - 24 **j** - 12 **k**

- Lineares Gleichungssystem

[1] **n** $\perp$ **u** $\rightarrow$ **n**·**u** = 0
[2] **n** $\perp$ **v** $\rightarrow$ **n**·**v** = 0
und 1 freier Parameter, $n_z = t$ benutzt
[1] $2\ n_x - 4\ n_y + 6\ t = 0$
[2] $-7\ n_x + 8\ n_y - 9\ t = 0$
aus [1]: $n_x = 2\ n_y - 3\ t$
in [2]: $-14\ n_y + 21\ t + 8\ n_y - 9\ t = 0 \rightarrow n_y = 2\ t \rightarrow n_x = t$
n = $\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$; sinnvolle Wahl für "schöne" Zahlen t = 1; damit **n** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.5 ERGÄNZUNG: Punktprobe über das Spatprodukt

Eine Ebene kann auch so definiert werden: E: (**x** - **a**)·(**u** x **v**) = 0
Dabei wird direkt die relative Lagebeziehung berücksichtigt.
(Wenn **n** = **u** x **v** eingesetzt wird, ist dies die Normalenform!)

Für die Punktprobe wird **p** als **x** eingesetzt. Das Spatprodukt kann dann als Determinante geschrieben werden. Wenn der Punkt P in der Ebene liegt, ist die Ebenengleichung damit erfüllt, die Determinantenform dafür ergibt 0.

p - **a** = $\begin{pmatrix} 98 - 1 \\ -125 - 3 \\ 164 - 5 \end{pmatrix}$

(**p** - **a**)·(**u** x **v**) = $\begin{vmatrix} 97 & -128 & 159 \\ 2 & -4 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 97\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} - (-128)\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -7 & -9 \end{vmatrix} + 159\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}$

= 97 · (-12) + 128 · 24 + 159 · (-12) = 0 ☑ $\Rightarrow$ P liegt in der Ebene