Analytische Geometrie - Lagebeziehungen Gerade / Gerade

Teil 1 Allgemeines / Parameterform R^2

Lage zweier Geraden zueinander

In R^2 sind möglich

(1) parallel,
(2) identisch,
(3) die Geraden schneiden sich.

In R^3 kommt noch dazu

(4) sie laufen aneinander vorbei, ohne Schnittpunkt; sog. "windschiefe Geraden".

Prinzipiell gibt es zwei Wege

- **Sofort ein Lineares Gleichungssystem für die Koordinaten lösen. Das liefert in 1 Schritt Informationen über die gegenseitige Lage und bei sich schneidenden Geraden die Koordinaten des Schnittpunkts.**
- **Zuerst auf Sonderfälle parallel oder identisch untersuchen. Das kann eventuell die Rechenarbeit reduzieren.**

1. g1 und g2 in Parameterform

1.1 Verfahren: Schrittweise Untersuchung

g1: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r \cdot \mathbf{u}$ und g2: $\mathbf{x} = \mathbf{b} + s \cdot \mathbf{v}$

(1) parallel

$\mathbf{v} = t \cdot \mathbf{u}$ Beide Richtungen sind gleich. **u** und **v** sind linear abhängig (kollinear).
(Es muss <u>nicht</u> gelten $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Beide Richtungsvektoren können ja verschiedene Länge haben oder in entgegengesetzte Richtung zeigen. Die Orientierung ist dann immer noch dieselbe!) Man nennt zwei solche linear abhängige Vektoren auch "kollinear".

Die lineare Abhängigkeit wird entweder einfach erkennbar, z.B. <u>alle</u> Koordinaten eines Vektors sind jeweils das Vielfache der Koordinaten des anderen, oder durch eine kurze Rechnung überprüft: t für die 1. Koordinate errechnen. Dieses t muss dann auch für die 2. Koordinate gelten, und in R^3 auch noch für die 3. Koordinate.

(2) identisch
Wir haben zwei verschiedene Formeln, die dasselbe Objekt Gerade darstellen. Jeder Punkt **x** muss also durch g1 oder g2 beschrieben werden können. (Natürlich sind **u** und **v** auch linear abhängig; formal sind die Geraden auch parallel.)
$\mathbf{x} = \mathbf{a} + r \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b} + s \cdot \mathbf{v}$.

Mit $\mathbf{v} = t\,\mathbf{u}$ ist das $\mathbf{a} + r \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b} + s\,t\,\mathbf{u}$

Geordnet: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (r - s \cdot t) \cdot \mathbf{u}$

Rechentechnisch am einfachsten ist: Für **x** verwenden wir den schon bekannten Aufpunkt einer der beiden Geraden, z.B. **b** von g2. Bei identischen Geraden muss dann **b** auch auf g1 liegen. Es muss also gelten $\mathbf{b} = \mathbf{a} + r \cdot \mathbf{u}$. Das liefert 2 (in R^2) oder 3 (in R^3) lineare Gleichungen für die Koordinaten. Für eine Koordinate wird r errechnet. Dieses r muss dann auch für die weiteren Koordinaten gelten.

(3, 4) Schnittpunkt und windschief.

g1 und g2 sind <u>nicht</u> parallel. Das ist also schon vorher überprüft worden!

Es gibt zwei Zahlen (Skalare) r und s, für die die Gleichung

a + r · **u** = **b** + s · **v** gilt.

In R^2 muss das immer gelten (außer man hat sich irgendwo verrechnet!). Zwei Geraden, die nicht parallel sind (und damit auch nicht identisch) müssen sich schneiden.

In R^3 ist möglich, dass für 2 Komponenten zwei solche Zahlen gefunden werden, aber beim Einsetzen für die 3. Komponente dann ein Widerspruch vorliegt. Dann sind die Geraden windschief.

1.2 Verfahren: Sofort mit dem Linearen Gleichungssystem beginnen

Dann gilt mit dem Ansatz **a** + r · **u** = **b** + s · **v**

mit 2 oder 3 Komponentengleichungen geschrieben:

a) Für R^2:
  - → genau 1 Lösung: Schnittpunkt
  - → keine Lösung: parallel [1])
  - → unendlich viele Lösungen: identisch [2])

b) Für R^3:
  - → genau 1 Lösung: Schnittpunkt
  - → keine Lösung: parallel oder windschief *)
  - → unendlich viele Lösungen: identisch

  *) ... und dann ist noch die Untersuchung auf kollineare Richtungsvektoren nötig!

[1]) ↳ Anschaulich ist das verständlich. Das Rechenverfahren sucht einen Schnittpunkt. Bei parallelen Geraden gibt es keinen Schnittpunkt und damit gibt es auch keine Lösung des Gleichungssystems.

[2]) ↳ Auch anschaulich verständlich. Bei zwei Geraden, die identisch sind, also übereinander liegen, ist formal jeder Punkt auch ein Schnittpunkt. Damit gibt es unendlich viele Schnittpunkte und unendlich viele Lösungen.

1.3 Beispiel: Relative Lage zweier Geraden in R^2; g1: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r \cdot \mathbf{u}$; g2: $\mathbf{x} = \mathbf{b_2} + s \cdot \mathbf{v}$

g1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

<u>A)</u> g2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}$

<u>B)</u> g2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

<u>C)</u> g2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 28 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

1.3.1 Lösung mit Verfahren 1

A)

(1) Ohne langes Rechnen sehen wir sofort: **v** = 2 **u**. Die Richtungsvektoren sind kollinear, g1 und g2 parallel oder identisch.

(2) Für die Prüfung auf identisch am einfachsten die Bedingung **b** = **a** + r **u** untersuchen:

$\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ **?**

1. Koordinate: 2 - 6 r = -7 ⇒ r = 3/2

Dies in die 2. Koordinate eingesetzt: 9 = 3 + 3/2 · 4. ☑

(Ein bestimmtes r gilt für alle Koordinaten)

⇒ Damit sind die Geraden auch identisch.

(Verschiedene Formeln für dasselbe geometrische Objekt)

B)

(1) Wahrscheinlich sehen wir auch ohne Rechnen: **v** = (-1/2) **u**.

Wenn man das rechnen will, ist zu untersuchen ob **v** = t **u** mit einem t für beide Koordinaten gilt. **u** = $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$, **v** = $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Koordinate: 3 = -6 t ⇒ t = -1/2

t eingesetzt in die 2. Koordinate: -2 = -1/2 · 4 ☑

Es gibt ein t, die Richtungsvektoren sind kollinear.

(2) Nun die Prüfung auf identische Geraden; gilt **b** = **a** + r **u**?

$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ **?**

1. Koordinate: 2 - 6 r = 6 ⇒ t = -2/3

Dies eingesetzt: 5 ≠ 3 - 2/3 · 4 = 1/3 ☒

Es gibt kein r, das die Gleichung in allen Komponenten erfüllt, der Punkt von g2 (mit dem Richtungsvektor **b**) liegt nicht auf der Geraden g1.

⇒ Die Geraden sind nicht identisch, sondern nur parallel.

C)

(1, 2) Zuerst Untersuchung auf parallel. **v** = t · **u**? **u** = $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$, **v** = $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Wir sparen uns die Rechnung, weil 6/3 = 2 aber 4/5 ≠ 2. Es gibt kein t.

→ g1 und g2 sind nicht parallel (und damit auch nicht identisch)

→ In R^2 muss es also einen Schnittpunkt geben.

(3) Ansatz für einen Punkt, der auf beiden Geraden liegt: **x** = **a** + r · **u** = **b** + s · **v**

$\binom{2}{3}$ + r $\binom{-6}{4}$ = $\binom{-4}{28}$ + s $\binom{3}{5}$

Lineares Gleichungssystem, 2 Gleichungen für 2 Unbekannte.

(Verschiedene Lösungsmöglichkeiten; hier eine mit Zeilenoperationen)

[1] 2 - 6 r = -4 + 3 s

[2] 3 + 4 r = 28 + 5 s

[1'] - 6 t - 3 s = -6 | umgestellt

[2'] 4 t - 5 s = 25 | umgestellt

[1''] - 30 t - 15 s = -30 | = [1'] · 5

[2''] 12 t - 15 s = 75 | = [2'] · 3

[1'''] - 42 t = -105 | = |1''] - [2'']

⇒ t = 5/2; Für die Rechenkontrolle noch s: [2']: 10 - 5 s = 25 ⇒ s = - 3

⇒ Schnittpunkt aus g1: Kontrolle, Schnittpunkt aus g2:

$\binom{2}{3}$ + 5/2 · $\binom{-6}{4}$ = $\binom{\mathbf{-13}}{\mathbf{13}}$ $\binom{-4}{28}$ - 3 · $\binom{3}{5}$ = $\binom{\mathbf{-13}}{\mathbf{13}}$

1.3.2 Lösung mit Verfahren 2

Es ist offenkundig, dass "parallel" und "identisch" sich schneller mit Verfahren 1 finden lassen!

A)

$\binom{2}{3}$ + r $\binom{-6}{4}$ = $\binom{-7}{9}$ + s $\binom{-12}{8}$.

[1] 2 - 6 r = -7 - 12 s

[2] 3 + 4 r = 9 + 8 s

[1'] - 6 r + 12 s = -9 | umgestellt

[2'] 4 r - 8 s = 6 | umgestellt

[1''] 2 r- 4 s = 3 | = [1'] / 3

[2''] 2 r- 4 s = 3 | = [2] / 2

Jedes r = 2 s + 3/2 erfüllt beide Gleichungen. Es gibt unendlich viele Lösungen.

⇒ Die Geraden sind identisch.

B)

$\binom{2}{3}$ + r $\binom{-6}{4}$ = $\binom{6}{5}$ + s $\binom{3}{-2}$.

[1] 2 - 6 r = 6 + 3 s

[2] 3 + 4 r = 5 -2 s

[1'] - 6 r - 3 s = 4 | umgestellt

[2'] 4 r+ 2 s = 2 | umgestellt

Vergleich: s = - 2 r -4/3 und s = - 2 r + 1; also ein Widerspruch.

(Oder: s = - 2 r + 1 eingesetzt: -6 r - (- 6r +3) = -3 = 4; Widerspruch)

⇒ Es gibt keine Lösung, die Geraden sind parallel.

C)

$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ + r $\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}-4\\28\end{pmatrix}$ + s $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

[1] 2 - 6 r = -4 + 3 s

[2] 3 + 4 r = 28 + 5 s

[1'] - 6 r - 3 s = -6 | umgestellt

[2'] 4 r - 5 s = 25 | umgestellt

Aus [1']: s = 2 - 2 r; in [2']: 14 r = 35 → r = 35/14 = 5/2 → s = -3

⇒ Schnittpunkt S = $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ + 5/2 · $\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}-4\\28\end{pmatrix}$ - 3 · $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}-13\\13\end{pmatrix}$