Analytische Geometrie - Lagebeziehungen Gerade / Gerade

Teil 3 Normalenform R^2

Lage zweier Geraden zueinander

In R^2 sind möglich parallel, identisch, Schnittpunkt.

In R^3 ist keine (eindeutige) Normalenform möglich.

3.A g1 <u>und</u> g2 in Normalenform

g: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$

Für die Behandlung als Lineares Gleichungssystem für die Koordinaten wird aufgespalten,
g: $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$, und die rechte Seite wird berechnet.

3.1 Verfahren: Schrittweise Untersuchung

Möglich ist, zuerst auf Parallelität zu untersuchen:
$\mathbf{n}$(g2) ist dann kollinear zu $\mathbf{n}$(g1). Das ist einfach erkennbar.
Bei kollinearen Vektoren kann auf ein gleiches $\mathbf{n}$ gekürzt werden.
Falls "parallel" sind identische Gleichungen unmittelbar erkennbar. Diese erste Überprüfung ist daher ein nur kurzer Arbeitsschritt, den man sinnvollerweise vor einer Rechnung nach 3.2 durchführt.

3.2 Verfahren: Lineares Gleichungssystem für die Koordinaten

Ansatz: $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n_1} = \mathbf{a_1}\cdot\mathbf{n_1}$ und $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n_2} = \mathbf{a_2}\cdot\mathbf{n_2}$ in 2 Komponentengleichungen.

Dann gibt für die zwei Koordinaten von $\mathbf{x}$

→ genau 1 Lösung:	Schnittpunkt
→ keine Lösung:	parallele Geraden
→ unendlich viele Lösungen:	identische Geraden

3.3 Beispiel

g1: $\left[\mathbf{x} - \binom{2}{3}\right]\cdot\binom{2}{3} = 0$ $\quad\rightarrow$ g1: $\mathbf{x}\cdot\binom{2}{3} = 13$

<u>A)</u> g2: : $\left[\mathbf{x} - \binom{-7}{9}\right]\cdot\binom{4}{6} = 0$ $\quad\rightarrow$ g2: $\mathbf{x}\cdot\binom{2}{3} = 13$

<u>B)</u> g2: : $\left[\mathbf{x} - \binom{6}{5}\right]\cdot\binom{-12}{-18} = 0$ $\quad\rightarrow$ g2: $\mathbf{x}\cdot\binom{2}{3} = 27$

<u>C)</u> g2: : $\left[\mathbf{x} - \binom{-4}{28}\right]\cdot\binom{-5}{3} = 0$ $\quad\rightarrow$ g2: $\mathbf{x}\cdot\binom{-5}{3} = 104$

➔ Bei A) und B) wurde die lineare Abhängigkeit erkannt und $\mathbf{n_2}$ an $\mathbf{n_1}$ angeglichen.

<u>A)</u>

$\mathbf{n_2} = \mathbf{n_1}$ und gleiche Gesamtgleichung: ⇒ <u>Identische</u> Geraden
Die weitere Rechnung wäre also <u>nicht</u> nötig!

Lineares Gleichungssystem (<u>Nur</u> zur Illustration des Verfahrens!)

[1] $2x + 3y = 13$

[2] $2x + 3y = 13$

[1] -[2]: $0 = 0$ ⇒ unendlich viele Lösungen ⇒ <u>Identische</u> Geraden

B)

$\mathbf{n_2} = \mathbf{n_1}$ aber nicht gleiche Gesamtgleichung: $\Rightarrow$ Parallele Geraden.
Die weitere Rechnung wäre also nicht nötig!

Lineares Gleichungssystem (Nur zur Illustration des Verfahrens!)

[1] $2x + 3y = 13$

[2] $2x + 3y = 27$

[2] -[1]: $0 = 14 \Rightarrow$ Widerspruch, keine Lösung $\Rightarrow$ Parallele Geraden

C)

$\mathbf{n_2} \neq \mathbf{n_1}$ (genauer: nicht kollinear) damit nicht parallel (trivialerweise auch nicht identisch)

Lineares Gleichungssystem

[1] $2x + 3y = 13$

[2] $-5x + 3y = 104$

[1] -[2]: $7x = -91 \rightarrow x = -13 \rightarrow$ in [1]: $3y = 13 - (-26) \rightarrow y = 13$

$\Rightarrow$ Die Geraden schneiden sich, Schnittpunkt S(-13|13)

3.B Gemischt Normalenform / Parameterform

$\mathbf{n}$ lässt sich in R^2 einfach aus $\mathbf{u}$ erzeugen. (Koordinatenvertauschung und Vorzeichenwechsel).
Damit kann auch einfach aus der Parameterform eine Normalenform erzeugt und dann weiter wie bei 3.A fortgesetzt werden, weil ein Aufpunkt A auch gegeben ist.

Beispiel 1

g1: $\left[\mathbf{x} - \binom{2}{3}\right] \cdot \binom{2}{3} = 0 \rightarrow$ g1: $\mathbf{x} \cdot \binom{2}{3} = 13$

g2: $\mathbf{x} = \binom{-7}{9} + s\binom{-12}{8} \rightarrow$ für weitere Rechnung vereinfachen: $\mathbf{x} = \binom{-7}{9} + s\binom{-3}{2}$

Für g2: $\mathbf{n_2} = \binom{-8}{-12} \rightarrow \mathbf{n_2} = \binom{2}{3}$

Damit g2 auch "g2: $\left[\mathbf{x} - \binom{-7}{9}\right] \cdot \binom{2}{3} = 0$" und weiter wie bei 3.A.
Auf jeden Fall "parallele Geraden". Weitere Rechnung durch Einsetzen von g2 in g1 oder ein Lineares Gleichungssystem.

Einsetzen g2 in g1

$\mathbf{x} \cdot \binom{2}{3} = 13 \rightarrow \binom{-7}{9} \cdot \binom{2}{3} + s\binom{-3}{2} \cdot \binom{2}{3} = 13 + s \cdot 0 = 13 \rightarrow$ "13 = 13"

$\rightarrow$ unendlich viele Lösungen $\Rightarrow$ Identische Geraden

Lineares Gleichungssystem - 3 Unbekannte {x, y, s}

[1] $2x + 3y = 13$

[2] $x = -7 - 12s$

[3] $y = 9 + 8s$

[3]: $s = (y - 9) / 8 \rightarrow$ in [2]: $x = (-3y + 13)/2 \rightarrow$ in [1]: "13=13" $\Rightarrow$ Identische Geraden

Beispiel 2

g1: $\left[\mathbf{x} - \binom{2}{3}\right] \cdot \binom{2}{3} = 0 \rightarrow$ g1: $\mathbf{x}\cdot\binom{2}{3} = 13$

g2: $\mathbf{x} = \binom{-4}{28} + s \cdot \binom{3}{5} \rightarrow \mathbf{n} = \binom{-5}{3}$

keine parallelen Geraden

Einsetzen g2 in g1

$\mathbf{x}\cdot\binom{2}{3} = 13 \rightarrow \binom{-4}{28}\cdot\binom{2}{3} + s\,\binom{3}{5}\cdot\binom{2}{3} = 76 + 21\,s = 13 \rightarrow s = -3$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt $\mathbf{x} = \binom{-4}{28} -3 \cdot \binom{3}{5} = \binom{-13}{13} \rightarrow$ S(-13|13)

Lineares Gleichungssystem

[1] $2\,x + 3\,y = 13$

[2] $x = -4 + 3\,s$

[3] $y = 28 + 5\,s$

[3]: $s = (y - 28) / 5 \rightarrow$ in [2]: $x = (3\,y - 104) / 5 \rightarrow$ in [1]: $y = 13 \rightarrow x = -13$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt S(-13|13)

Bemerkung: Bestimmung von s

Anstelle der Lösung der Gleichungen in Koordinaten ist auch ein formales Vorgehen möglich.
(Dabei kommen aber auch - über das Skalarprodukt - die Koordinaten vor!)

Für den Schnittpunkt gilt $\mathbf{x} = \mathbf{a_2} + s\,\mathbf{u_2}$ und $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n_1} = \mathbf{a_1}\cdot\mathbf{n_1}$

Einsetzen liefert $(\mathbf{a_2} + s\,\mathbf{u_2})\cdot\mathbf{n_1} = \mathbf{a_1}\cdot\mathbf{n_1} \rightarrow \mathbf{a_2}\cdot\mathbf{n_1} + s\,\mathbf{u_2}\cdot\mathbf{n_1} = \mathbf{a_1}\cdot\mathbf{n_1}$

Aufgelöst $s = \{\,\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{n_1} - \mathbf{a_2}\cdot\mathbf{n_1}\,\} / \mathbf{u_2}\cdot\mathbf{n_1}$ und dann Einsetzen von s in die Parametergleichung.

$\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{n_1} = \binom{2}{3}\cdot\binom{2}{3} = 13$; $\mathbf{a_2}\cdot\mathbf{n_1} = \binom{-4}{28}\cdot\binom{2}{3} = 76$; $\mathbf{u_2}\cdot\mathbf{n_1} = \binom{3}{5}\cdot\binom{2}{3} = 21$

$s = (13 - 76)/21 = -3$ und damit der Schnittpunkt S(-13|13)

Insgesamt kein kürzerer Rechenweg!

3.C Gemischt Normalenform / Koordinatengleichung

Die Normalenform enthält die Koordinatendarstellung der Normalen. Damit ist schnell erkennbar, ob die beiden Normalen kollinear sind.

Falls dies zutrifft, sind die Geraden identisch, wenn beim Einsetzen von **a** aus der Normalenform in die Koordinatengleichung diese erfüllt sind.

Beispiel 1

g1: $\left[\mathbf{x} - \binom{2}{3}\right] \cdot \binom{2}{3} = 0 \rightarrow$ g1: $\mathbf{x}\cdot\binom{2}{3} = 13$

g2: $4\,x + 6\,y - 26 = 0$

Aus den Koeffizienten von g2 die Normale $\mathbf{n} = \binom{4}{6}$ und mit "schöneren" Zahlen $\mathbf{n} = \binom{2}{3}$.

Man kann natürlich auch einfach g2 durch erkennbaren Faktor 2 kürzen!

Gleiches (also auch kollineares n) $\rightarrow$ sicher parallel. Auch identisch?

A(2|3) in g2: $4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 - 26 = 0 \rightarrow$ g2 erfüllt $\Rightarrow$ Identische Geraden

Beispiel 2

g1: $\left[\mathbf{x} - \binom{2}{3}\right] \cdot \binom{2}{3} = 0 \rightarrow$ g1: $\mathbf{x}\cdot\binom{2}{3} = 13$

g2: -5 x + 3 y - 104 = 0

Die beiden Normalen sind nicht kollinear. Lineares Gleichungssystem lösen.

[1] 2 x + 3 y = 13
[2] -5 x + 3 y = 104

[1]: x = (13 - 3 y)/2 → in [2]: y = 13 → x = -13 → ⇒ Schnittpunkt S(-13|13)