Analytische Geometrie - Lagebeziehungen Gerade / Ebene

Teil 1 Ebene in Parameterform

Möglichkeiten:

(1) parallel zur Ebene (aber nicht in E)

(2) die Gerade liegt in der Ebene, (formal auch "parallel zur Ebene")

(3) die Gerade schneidet die Ebene.

Das Problem ist nur in R^3 definiert. Damit kommt für die Gerade nur die Parameterform in Frage. Die Ebene kann in der Parameterform, in der Normalenform oder als Koordinatengleichung definiert sein.

Prinzipiell gibt es zwei Wege

A Zuerst auf Sonderfälle parallel oder identisch untersuchen. Das kann eventuell die Rechenarbeit reduzieren.

B Sofort ein Lineares Gleichungssystem für die Koordinaten lösen. Das liefert in 1 Schritt Informationen über die gegenseitige Lage und bei einem Schnittpunkt dessen Koordinaten.

Bei **Weg A** ist die Strategie:

(1) Aus den Richtungsvektoren der Ebene wird die Normale berechnet. Das geht über das Kreuzprodukt oder die Bedingung der Orthogonalität. Wenn die Gerade parallel zu Ebene liegt, ist sie auch orthogonal zu dieser Normalen! Das wird mit dem Skalarprodukt untersucht.

(2) Wenn "parallel": Die Gerade kann noch in der Ebene liegen. Dazu muss ein Lineares Gleichungssystem mit den Koordinaten gelöst werden. Rechnerisches Vorteil ist, dass nur 2 Unbekannte vorkommen.

(3) Wenn nicht "parallel": Das Lineare Gleichungssystem mit 3 Unbekannten wird gelöst.

Bei **Weg B** gibt die Lösungsmannigfaltigkeit für die Parameter die Information:

(1) keine Lösung: parallel

(2) unendlich viele Lösungen (Lösung mit freiem Parameter): g in E

(3) genau 1 Lösung: g schneidet E

! Aus der Parameterform für E ist schnell die Normalenform zu errechnen. Die Untersuchung der Lagebeziehung benötigt dann weniger Rechenarbeit.

Ebene: E: $\mathbf{x} = \mathbf{b} + s\,\mathbf{v} + t\,\mathbf{w}$; **Gerade:** g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u}$

(1) "Parallele" Gerade

E: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$; g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-8\\9\\-10\end{pmatrix}$

Weg A

(1.a) Kreuzprodukt $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, gelöst über Determinanten-Entwicklung

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -3 & 4\\ 4 & -5 & 6\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -5 & 6\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 6\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix} = 2\,\mathbf{i} - (-4)\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

mit "schöneren" Zahlen $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Ist $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$? $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\9\\-10\end{pmatrix} = -8 + 18 - 10 = 0 \Rightarrow$ "ja" $\Rightarrow$ "<u>parallel</u>"

(1.b) mit $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$ und $\mathbf{n} \perp \mathbf{w}$ zur Bestimmung der Normalen

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = \begin{pmatrix}n_x\\n_y\\n_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} = 2\,n_x - 3\,n_y + 4\,n_z = 0$

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{w} = \begin{pmatrix}n_x\\n_y\\n_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix} = 4\,n_x - 5\,n_y + 6\,n_z = 0$

Freier Parameter, $n_z = p \rightarrow n_x = 3/2\,n_y - 2\,p \rightarrow 6\,n_y - 8\,p - 5\,n_y + 6\,p = 0 \rightarrow n_y = 2\,p$

$\rightarrow n_x = p \rightarrow \mathbf{n} = \begin{pmatrix}p\\2p\\p\end{pmatrix}$; mit $p = 1$ ist das auch $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

(2) Wenn nach Schritt 1 "parallel" festgestellt wurde, dann - und nur dann - führt man die Untersuchung durch, ob g <u>in</u> E liegt. Wenn das zutrifft, muss für jeden Punkt von g auch die Ebenengleichung erfüllt sein. Am einfachsten wählen wir den Aufpunkt von g.

$\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$

Gleichungssystem für die drei Koordinaten:

[1] $2\,s + 4\,t = 0$

[2] $-3s - 5t + 1 = 0$

[3] $4\,s + 6\,t - 1 = 0$

[1]: $s = -2\,t \rightarrow$ in [2]: $6\,t - 5\,t + 1 = 0 \rightarrow t = -1 \rightarrow$ in [1]: $s = 2$

damit [3]: $4 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) - 1 \neq 0 \rightarrow$ nicht erfüllt, also g <u>nicht</u> in E.

Anmerkung - "Alternative": Anstelle der Lösung des Gleichungssystems kann man über Skalarprodukte rechnen. Das <u>Ergebnis</u> ist dann genau der <u>Rechenweg</u>, den man auch <u>bei der Normalenform der Ebene</u> benutzt! Der Aufpunkt $\mathbf{a}$ der Geraden muss auch in der Ebene liegen: $\mathbf{a} = \mathbf{b} + s\,\mathbf{v} + t\,\mathbf{w}$.

Umgestellt und skalar mit $\mathbf{n}$ multipliziert: $(\mathbf{a} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n} = s\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} + t\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}$

Weil $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$ und $\mathbf{w} \perp \mathbf{n}$, ist die rechte Seite 0. Die linke Seite wird geordnet: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 7$ und $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 8$. Weil $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \neq \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$ liegt g nicht in E.

Weg B (Bei Weg A nicht mehr nötig, weil "parallel")

Gleichungssystem für die drei Koordinaten, in der Form **b** + s **v** + t **w** - **a** - r **u** = **0**

[1]	1 + 2 s + 4 t = 1 - 8 r	8 r + 2 s + 4 t = 0	4 r + s + 2 t = 0
[2]	2 - 3 s - 5 t = 1 + 9 r	-9 r - 3 s - 5 t = -1	
[3]	3 + 4 s + 6 t = 4 - 10 r	10 r + 4 s + 6 t = 1	

	r	s	t	(rechte Seite)	
[1]	4	1	2	0	
[2]	-9	-3	-5	-1	
[3]	10	4	6	1	
[1]	4	1	2	0	
[2']	0	-3	-2	-4	| = [1] · 9 + [2] · 4
[3']	0	-3	-2	-2	| = [1] · 5 - [3] · 2

Zeile [2'] und [3'] liefern einen Widerspruch. $\Rightarrow$ parallele Gerade

(2) Gerade liegt in der Ebene

E: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$; g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-8\\9\\-10\end{pmatrix}$

Weg A

(1) identisch zu (1) - gefunden "parallel"

(2) Liegt g in E?

$$\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$$

Gleichungssystem für die drei Koordinaten:

[1] 2 s + 4 t = 0

[2] -3s - 5t +1 = 0

[3] 4 s + 6 t -2 = 0

[1]: s = - 2 t $\rightarrow$ in [2]: 6 t - 5 t + 1 = 0 $\rightarrow$ t = -1 $\rightarrow$ s = 2

damit [3]: 8 - 6 - 2 = 0 $\rightarrow$ erfüllt, also $\Rightarrow$ g liegt in E.

Weg B (Bei Weg A nicht mehr nötig, weil "parallel")

[1]	1 + 2 s + 4 t = 1 - 8 r	8 r + 2 s + 4 t = 0	4 r + s + 2 t = 0
[2]	2 - 3 s - 5 t = 1 + 9 r	-9 r - 3 s - 5 t = -1	
[3]	3 + 4 s + 6 t = 5 - 10 r	10 r + 4 s + 6 t = 2	

	r	s	t		
[1]	4	1	2	0	
[2]	-9	-3	-5	-1	
[3]	10	4	6	2	
[1]	4	1	2	0	
[2']	0	-3	-2	-4	| = [1] · 9 + [2] · 4
[3']	0	-3	-2	-4	| = [1] · 5 - [3] · 2

Zeile [2'] - [3'] liefert "0 = 0" $\rightarrow$ Die Lösung enthält frei wählbare Parameter

$\rightarrow$ Unendlich viele Lösungen $\Rightarrow$ g liegt in E

(3) Gerade schneidet Ebene

E: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$; g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}13\\6\\7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$

Weg A

(1) Berechnung der Normalen wie bei (1): $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Ist $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$? $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} = 5 + 6 + 1 = 12 \neq 0 \rightarrow$ "nein" $\rightarrow$ "<u>nicht</u> <u>parallel</u>"

(2) (<u>Nur</u> zur Illustration!)

Diesen Schritt würden wir natürlich nicht durchführen! Nur wenn "parallel" gilt, kann als Sonderfall davon "g in E" zu treffen. Hier also nur, um zu sehen, ob wir auch tatsächlich das erwartete "g liegt nicht in E" finden!

Liegt g in E?

$\begin{pmatrix}13\\6\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$

Gleichungssystem für die drei Koordinaten:

[1] 2 s + 4 t - 12 = 0

[2] -3s - 5t -4 = 0

[3] 4 s + 6 t -4 = 0

[1]: s = - 2 t + 6 $\rightarrow$ in [2]: 6 t - 5 t - 22 = 0 $\rightarrow$ t = 22 $\rightarrow$ s = -38

damit [3]: -152 +132 - 4= -24 $\neq$ 0 $\rightarrow$ nicht erfüllt, also $\rightarrow$ g liegt <u>nicht</u> in E.

Weg B - und weil nicht "parallel" auch Schritt (3) für Weg A

[1]	1 + 2 s + 4 t = 13 + 5 r	-5 r + 2 s + 4 t = 12
[2]	2 - 3 s - 5 t = 6 + 3 r	-3 r - 3 s - 5 t = 4
[3]	3 + 4 s + 6 t = 7 + r	-r + 4 s + 6 t = 4

	r	s	t		
[1]	-5	2	4	12	
[2]	-3	-3	-5	4	
[3]	-1	4	6	4	
-----	-----	-----	-----	-----	
[1]	-5	2	4	12	
[2']	0	21	37	16	| = [1] · 3 - [2] · 5
[3']	0	-18	-26	-8	| = [1] - [3] · 5
-----	-----	-----	-----	-----	
[1]	-5	2	4	12	
[2']	0	21	37	16	
[3'']	0	0	120	120	| = [2'] · 18 + [3'] · 21

[3'']: t = 1 $\rightarrow$ [2']: 21 s = 16 - 37 $\rightarrow$ s = -1 $\rightarrow$ [1]: -5 r = 12 - 4 + 2 $\rightarrow$ r = -2

1 Lösung gefunden $\Rightarrow$ <u>Schnittpunkt</u> existiert

$\begin{pmatrix}13\\6\\7\end{pmatrix} -2\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$: S(3|0|5); Kontrolle: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$