Analytische Geometrie - Lagebeziehungen Gerade / Ebene

Teil 2 Ebene in Normalenform

Möglichkeiten:

(1) parallel zur Ebene (aber nicht in E)
(2) die Gerade liegt in der Ebene, (formal auch "parallel zur Ebene")
(3) die Gerade schneidet die Ebene.

Bei der Verwendung der Parameterform für E gab es die Lösungsmannigfaltigkeit:

(1) keine Lösung: parallel
(2) unendlich viele Lösungen (Lösung mit freiem Parameter): g in E
(3) genau 1 Lösung: g schneidet E

? Existiert etwas Ähnliches auch hier?

(Hinweis: Die Ebene und die Geraden sind dieselben wie im Teil "Parameterform".)

Ebene: E: $(\mathbf{x} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n} = 0$; **Gerade:** g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u}$

Für die nachfolgenden Rechnungen ist es bequemer die Normalenform "aufzuspalten:

$(\mathbf{x} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n} = 0 \rightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$

(1) Untersuchung auf g parallel zu E.
Wenn die Gerade parallel zu E liegt, liegt sie orthogonal zur Normalen auf die Ebene!
Überprüfung mit: Gilt $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0$?

(2) Liegt g in E?
Diese Rechnung ist nur sinnvoll, wenn " parallel" gefunden wurde!
Wenn g in E liegt, kann **a** als allgemeiner Punkt in der Normalenform eingesetzt werden.
Dann muss gelten: $(\mathbf{a} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n} = 0$ und kürzer $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$.

(3) Berechnung des Schnittpunkts g / E
Diese Rechnung ist nur sinnvoll, wenn "nicht parallel" gefunden wurde!
Der Schnittpunkt S hat die Bedingung: Der allgemeine Punkt x der Geradengleichung und der allgemeine Punkt x der Ebene sind gleich. Es wird also x aus der Geradengleichung in die Normalenform eingesetzt.
$(\mathbf{x} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n} = 0 \rightarrow (\mathbf{a} + r\,\mathbf{u} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n} = 0$
Für die Berechnung von r spalten wir auf: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} + r\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = 0$
Möglich ist auch die Auflösung $r = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}) / \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$.
Falls jemand mit dem Argument käme, "Vektoren kann man nicht dividieren", weisen wir darauf hin, dass das Skalarprodukt eine Zahl ist und durch Zahlen darf man dividieren.
Der Schnittpunkt folgt dann aus dem Einsetzen von r in die Geradengleichung.
(Eine Kontrolle durch Einsetzen in die Normalengleichung der Ebene ist eigentlich sinnlos, weil dies schon in der Herleitung des Lösungswegs benutzt wurde. Nur Rechenfehler wären so erkennbar.)

(1) "Parallele" Gerade

E: $\mathbf{x} = \left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 0$; g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-8\\9\\-10\end{pmatrix}$

(1) $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-8\\9\\-10\end{pmatrix}$ = (-8) + 18 + (-10) = 0 also orthogonal.

$\Rightarrow$ g ist <u>parallel</u> zu E.

(2) Liegt g in E?

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 1 + 2 + 4 = 7$; $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 1 + 4 + 3 = 8$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \neq \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$ also liegt g <u>nicht</u> in E

(3) Suche nach Schnittpunkt (wäre hier nicht mehr nötig, weil schon "parallel" gefunden!)

Schon berechnet: $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = 8$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 7$; $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0$

r = (8 - 7) / 0. Weil eine Division durch 0 nicht definiert ist, haben wir <u>keine</u> <u>Lösung</u> für r.
Es gibt keinen Schnittpunkt.
Das entspricht auch der formalen Lösungsmannigfaltigkeit: "keine Lösung"

(2) Gerade liegt in der Ebene

E: $\mathbf{x} = \left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 0$; g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-8\\9\\-10\end{pmatrix}$

(1) $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0$, bei (1) schon berechnet$\rightarrow$g ist parallel zu E.

(2) Liegt g in E?

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 1 + 2 + 5 = 8$; $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 1 + 4 + 3 = 8$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{n} \Rightarrow$ g liegt <u>in</u> E

(3) Suche nach Schnittpunkt (wäre hier nicht mehr nötig, weil schon "parallel" gefunden!)

Schon berechnet: $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = 8$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 8$; $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0$

r = 0 / 0. Das ist ein nicht definierter Ausdruck, der formal jeden Wert haben kann. Es gibt also keine eindeutige Lösung, und damit keinen Schnittpunkt. r ist ein freier Parameter.
Das entspricht auch der formalen Lösungsmannigfaltigkeit: "unendlich viele Lösungen"
💣 zum Problem "0/0" siehe die Nachbemerkung!

(3) Gerade schneidet Ebene

E: $\mathbf{x} = \left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 0$; g: $\mathbf{x} = \mathbf{x} = \begin{pmatrix}13\\6\\7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$

(1) $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} = 5 + 6 + 1 = 12$ also nicht orthogonal.

g ist <u>nicht</u> parallel zu E.

(2) Liegt g in E? (Das ist jetzt unnötig! - <u>Nur</u> als Illustration!)

(aber **a**·**n** und **a**·**n** werden bei (3) sowieso benötigt)

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}13\\6\\7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 13 + 12 + 7 = 32$; $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 1 + 4 + 3 = 8$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \neq \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$ also liegt g <u>nicht</u> in E

(3) Suche nach Schnittpunkt (jetzt nötig, weil "nicht parallel")

Schon berechnet: $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = 8$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 32$; $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 12$

r = (8 - 32) / 12 = -2. 1 Lösung gefunden ⇒ Es gibt einen <u>Schnittpunkt</u>.

Das entspricht auch der formalen Lösungsmannigfaltigkeit: "1 Lösung"

$\begin{pmatrix}13\\6\\7\end{pmatrix} -2 \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$: S(3|0|5)

Nachbemerkung - Fall (2) und "0/0"

Die Argumentation bei der Berechnung von r im Fall (2) ist mathematisch etwas schlampig.

- Bei Fall (1) ist die Begründung korrekt. $x / 0$ mit $x \neq 0$ ist eine nicht definierte Operation. Damit ist die Aussage "keine Lösung für r gefunden" richtig.
- Bei Fall (2) müsste man argumentieren: Wenn formal die nicht definierte Operation 0/0 erhalten wird, definieren wir das als "unendlich viele Lösungen für r".

Im vorgeschlagenen Verfahren, sollte im Fall (2) diese Rechnung gar nicht durchgeführt werden.

Mathematisch korrekt wäre, die Überprüfung <u>vor</u> einer Berechnung von r mit der Endformel "r = ..." durchzuführen. Dort steht $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} + r\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = 0$. Also $r\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$.

- Fall (1): $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$ und $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \neq \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$. Damit ist: $r \cdot 0 = x$, $x \neq 0$. Das ist ein Widerspruch. → Also "keine Lösung für r".
- Fall (2): $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$ und $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$. Damit ist: $r \cdot 0 = 0$. Das gilt für jedes beliebige r. → Also "unendlich viele Lösungen für r".