Analytische Geometrie - Lagebeziehungen Gerade / Ebene

Teil 3 Ebene als Koordinatengleichung

Möglichkeiten:

(1) parallel zur Ebene (aber <u>nicht</u> <u>in</u> E)

(2) die Gerade liegt <u>in</u> der Ebene, (formal auch "parallel zur Ebene")

(3) die Gerade schneidet die Ebene.

Bei der Verwendung der Parameterform für E gab es die Lösungsmannigfaltigkeit:

(1) keine Lösung: parallel

(2) unendlich viele Lösungen (Lösung mit freiem Parameter): g in E

(3) genau 1 Lösung: g schneidet E

? Existiert etwas Ähnliches auch hier?

(Hinweis: Die Ebene und die Geraden sind dieselben wie im Teil "Parameterform".)

Ebene: E: A x + B y + C z + D = 0; **Gerade:** g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u}$

Aus der Koordinatengleichung ist die Normale auf E direkt ablesbar.

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ (eventuell Kürzen auf "schöne" Zahlen)

(1) Untersuchung auf g parallel zu E.

Wenn die Gerade parallel zu E liegt, liegt sie orthogonal zur Normalen auf die Ebene!

Überprüfung mit: Gilt $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$?

(2) Liegt g in E?

Diese Rechnung ist nur sinnvoll, wenn " parallel" gefunden wurde!

Wenn g in E liegt, können die Koordinaten von **a** als allgemeiner Punkt {x, y ,z} in der Koordinatengleichung eingesetzt werden.

Dann muss die Gleichung erfüllt sein, wenn g in E.

Das gilt nur, wenn vorher "parallel" festgestellt wurde. Ansonsten könnte dies auch ein Durchstoßpunkt sein.

(3) Berechnung des Schnittpunkts g / E

Diese Rechnung ist nur sinnvoll, wenn "nicht parallel" gefunden wurde!

Der Schnittpunkt folgt durch Einsetzen von g in die Koordinatengleichung.

$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \rightarrow A\,(a_x + r\,u_x) + B\,(a_y + r\,u_y) + C\,(a_z + r\,u_z) + D = 0$

geordnet: $\{A\,a_x + B\,a_y + C\,a_z + D\} = -\,r\,\{A\,u_x + B\,u_y + C\,u_z\}$

oder auch: $r = -\,\{A\,a_x + B\,a_y + C\,a_z + D\} / \{A\,u_x + B\,u_y + C\,u_z\}$

Einsetzen von r in g liefert den Schnittpunkt S.

💣 zum Problem "x/0" (parallel) "0/0" (g in E) siehe die Nachbemerkung!

(1) "Parallele" Gerade

E: 3 x + 6 y + 3 z - 24 = 0; g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-8\\9\\-10\end{pmatrix}$

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Für die weitere Rechnung auch die Koordinatengleichung gekürzt: E: x + 2 y + z - 8 = 0

(1) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-8\\9\\-10\end{pmatrix}$ = (-8) + 18 + (-10) = 0 also orthogonal.

$\Rightarrow$ g ist parallel zu E.

(2) Liegt g in E?

Einsetzen **a** in E: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 - 8 = -1 \neq 0 \rightarrow$ g liegt nicht in E

(3) Suche nach Schnittpunkt (wäre hier nicht mehr nötig, weil schon "parallel" gefunden!)

Einsetzen von g in E

$\{A\, a_x + B\, a_y + C\, a_z + D\} = -\, r\, \{A\, u_x + B\, u_y + C\, u_z\}$

$\{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 - 8\} = -\, r\, \{1 \cdot (-8) + 2 \cdot 9 + 1 \cdot (-10)\}$

$-1 = -\, r \cdot 0 \rightarrow$ Widerspruch $\rightarrow$ keine Lösung für r, kein Schnittpunkt $\rightarrow$ parallel

Zur Auflösung r = - {Term 1} / {Term 2} = 1 / 0 siehe die Nachbemerkung!

(2) Gerade liegt in der Ebene

E: x + 2 y + z - 8 = 0; g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-8\\9\\-10\end{pmatrix}$

(1) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ also orthogonal. $\rightarrow$ g ist parallel zu E.

(2) Liegt g in E?

Einsetzen **a** in E: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 - 8 = 0 \Rightarrow$ g liegt in E

(3) Suche nach Schnittpunkt (wäre hier nicht mehr nötig, weil schon "parallel" gefunden!)

Einsetzen von g in E

$\{A\, a_x + B\, a_y + C\, a_z + D\} = -\, r\, \{A\, u_x + B\, u_y + C\, u_z\}$

$\{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 - 8\} = -\, r\, \{1 \cdot (-8) + 2 \cdot 9 + 1 \cdot (-10)\}$

$0 = -\, r \cdot 0 \rightarrow$ Das gilt für jedes r $\rightarrow$ unendlich viele Lösungen für r $\rightarrow$ g in E.

Zur Auflösung r = - {Term 1} / {Term 2} = 0 / 0 siehe die Nachbemerkung!

(3) Gerade schneidet Ebene

E: x + 2 y + z - 8 = 0; g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 + 6 + 1 = 12$ also nicht orthogonal. → g ist <u>nicht</u> parallel zu E.

(2) Liegt g in E? (Das ist jetzt unnötig! - <u>Nur</u> als Illustration!)
Einsetzen **a** in E: $1 \cdot 13 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 - 8 = 24$ → g liegt <u>nicht</u> in E

(3) Suche nach Schnittpunkt (jetzt nötig, weil "nicht parallel")
Einsetzen von g in E
$\{A\, a_x + B\, a_y + C\, a_z + D\} = -\, r\, \{A\, u_x + B\, u_y + C\, u_z\}$
$\{1 \cdot 13 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 - 8\} = -\, r\, \{1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1\}$
$24 = -\, r \cdot 12 \rightarrow r = -2 \rightarrow$ 1 Lösung gefunden ⇒ Es gibt einen <u>Schnittpunkt</u>.
$\begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} -2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$: S(3|0|5)

Nachbemerkung

Wenn die Auflösung r = - {Term 1} / {Term 2} benutzt wird, sind "x / 0" und "0 / 0" möglich. Die analoge Situation wurde schon in Teil 2 diskutiert.
Am Einfachsten in der Form {Term 1} = - r {Term 2} die beiden Sonderfälle "r nicht definiert" und "r beliebig" isolieren.

Hinweis

Als <u>*Alternative*</u> kann man über die Normalenform rechnen.

- **n** wird aus den Koeffizienten der Koordinatengleichung abgelesen.
- Der benötigte Aufpunkt auf der Ebene folgt schnell durch "geschickte Wahl":
  z-Koordinate für A(0|0|z) aus der Koordinatengleichung: z = - D / C.