Analytische Geometrie - Lagebeziehungen Ebene / Ebene

Teil 1 Parameterform

Möglichkeiten:

(1) Ebenen parallel zueinander (aber nicht E_1 in E_2)
(2) Identische Ebenen, (E_1 in E_2)
(3) Die Ebenen schneiden sich (Schnittgerade g_S)

Prinzipiell gibt es drei Wege

A Sofort ein Lineares Gleichungssystem für die Koordinaten lösen. Das liefert in 1 Schritt Informationen über die gegenseitige Lage und bei (3) die Schnittgerade.

B Zuerst wird auf die Sonderfälle parallel oder identisch untersucht. Falls dies nicht zutrifft, ist die Rechnung nach Weg A nötig.

C Man löst das Problem in der Normalenform. Das kann die Rechenarbeit reduzieren!

E_1: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r_1\,\mathbf{u_1} + s_1\,\mathbf{v_1}$; E_2: $\mathbf{x} = \mathbf{b} + r_2\,\mathbf{u_2} + s_2\,\mathbf{v_2}$; g_S: $\mathbf{x} = \mathbf{c} + t\,\mathbf{u}$

Bei **Weg A** gibt die Lösungsmannigfaltigkeit für die Parameter die Information:

(1) keine Lösung: parallele Ebenen
(2) unendlich viele Lösungen: identische Ebenen
(3) genau 1 Lösung - mit 1 freiem Parameter: die Ebenen schneiden sich

Als Schnittbedingung gilt, dass der allgemeine Punkt in beiden Ebenen liegen muss. Geometrisch erwarten wir, dass für diesen allgemeinen Punkt eine Geradengleichung gelten muss. Die Bedingung $\mathbf{a} + r_1\,\mathbf{u_1} + s_1\,\mathbf{v_1} = \mathbf{b} + r_2\,\mathbf{u_2} + s_2\,\mathbf{v_2}$ liefert 3 Gleichungen für die 4 Unbekannten $\{r_1, s_1, r_2, s_2\}$. Damit enthält die Lösung in 3 Komponenten 1 freien Parameter. Das entspricht der Erwartung, weil für eine Gerade $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u}$ auch ein freier Parameter vorhanden ist.

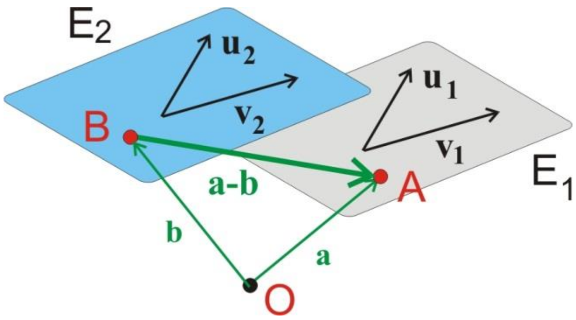
Sind die Ebenen parallel, gibt es keine Schnittgerade. Wir erwarten dann, dass das Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Sind die Ebenen gleich, liegt jede Gerade, die in E_1 liegt auch in E_2. Formal haben wir damit unendlich viele "Schnittgeraden". "Die Ebenen schneiden sich" bedeutet aber, dass es nur 1 eindeutige Schnittgerade gibt.

Zu **<u>Weg B</u>**:
Die Komplanarität der Richtungsvektoren wird untersucht.

→ **Parallel oder identisch**, falls <u>beide</u> Richtungsvektoren der einen Ebene parallel zur anderen Ebene liegen.
Berechnung:
{$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{v_2}$} <u>und</u> {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{v_2}$} sind linear abhängig.

→ **Identisch**, falls <u>zusätzlich</u> der Verbindungsvektor der Aufpunkte auch in der Ebene liegt. Berechnung:
{($\mathbf{a}$ - $\mathbf{b}$), $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{v_1}$} oder {($\mathbf{a}$ - $\mathbf{b}$), $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{v_2}$} sind linear abhängig.



Zu **<u>Weg C</u>**:

Aus den Richtungsvektoren der Ebenen werden die Normalen berechnet. Das geht über das Kreuzprodukt oder die Bedingung der Orthogonalität. Da auch ein Aufpunkt bekannt ist, kann die Normalenform sofort formuliert werden.

Die weitere Rechnung wird im Teil "Normalenform" behandelt.

(Hinweis: Es werden dort dieselben Ebenen wie in diesem Teil mit der Normalenform untersucht.)

(1) Parallele Ebenen

E_1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; E_2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Gleichungssystem für die Koordinaten

[1] $-6 + r_1 - 3\,s_1 = 1 - 2\,r_2 + 4\,s_2$ $\rightarrow r_1 - 3\,s_1 + 2\,r_2 - 4\,s_2 = 7$

[2] $-3 + 5\,r_1 = 11 + 5\,r_2 + 5\,s_2$ $\rightarrow 5\,r_1 - 5\,r_2 - 5\,s_2 = 14$

[3] $-5 + 4\,r_1 - 2\,s_1 = 1 + 2\,r_2 + 6\,s_2$ $\rightarrow 4\,r_1 - 2\,s_1 - 2\,r_2 - 6\,s_2 = 6$

	r_1	s_1	r_2	s_2		
[1]	1	-3	2	-4	7	
[2]	5	0	-5	-5	14	
[3]	4	-2	-2	-6	6	

----

[1]	1	-3	2	-4	7	
[2']	0	-15	15	-15	21	| = [1] · 5 -[2]
[3']	0	-10	10	-10	22	| = [1] · 4 -[3]

----

[1]	1	-3	+2	-4	7	
[2']	0	-15	15	-15	21	
[3'']	0	0	0	0	-12	| = [2'] - 3/2 ·[3']

[3'']: Widerspruch → es gibt keine Lösung. Es existiert keine Schnittgerade.

(2) Identische Ebenen

E_1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\-5\end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix}$; E_2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}7\\2\\7\end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

Gleichungssystem für die Koordinaten

[1]	$-6 + r_1 - 3 s_1 = 7 - 2 r_2 + 4 s_2$	$\rightarrow r_1 - 3 s_1 + 2 r_2 - 4 s_2 = 13$	
[2]	$-3 + 5 r_1 = 2 + 5 r_2 + 5 s_2$	$\rightarrow 5 r_1 - 5 r_2 - 5 s_2 = 5$	$\rightarrow r_1 - r_2 - s_2 = 1$
[3]	$-5 + 4 r_1 - 2 s_1 = 7 + 2 r_2 + 6 s_2$	$\rightarrow 4 r_1 - 2 s_1 - 2 r_2 - 6 s_2 = 12$	$\rightarrow 2 r_1 - s_1 - r_2 - 3 s_2 = 6$

	r_1	s_1	r_2	s_2		
[1]	1	-3	2	-4	13	
[2]	1	0	-1	-1	1	
[3]	2	-1	-1	-3	6	
-----						
[1]	1	-3	2	-4	13	
[2']	0	-3	3	-3	12	| = [1] - [2]
[3']	0	-5	5	-5	20	| = [1] · 2 - [3]
-----						
[1]	1	-3	2	-4	13	
[2"]	0	-1	1	-1	4	| = [2'] / 3
[3"]	0	-1	1	-1	4	| = [2'] / 5

[2"] gleich [3"] $\rightarrow$ 2 freie Parameter. z.B. r_2 und s_2. Dann liegt **x** irgendwo auf der Ebene 2.

Wenn man (z.B. aus Neugier) weiter rechnet, erhält man allgemein
mit $r_1 = 1 + r_2 + s_2$ und $s_1 = r_2 - s_2 - 4$
für **x** in E_1 und E_2 die gleiche Koordinatendarstellung mit 2 Parametern. Jede beliebige Darstellung mit 2 Parametern liegt in beiden Ebenen. Es gibt keine (eindeutige) Schnittgerade - nur formal "unendlich viele".

$$E_1\text{: } \mathbf{x} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\-5\end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\-5\end{pmatrix} + (1 + r_2 + s_2) \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + (-4 + r_2 - s_2) \begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-6+1+12\\-3+5\\-5+4+8\end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix} - s_2 \begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\2\\7\end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

E_1 und E_2 haben dieselbe Parameterform.

(3) Schnittgerade

E_1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\-5\end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix}$; E_2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\11\\1\end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

Gleichungssystem für die Koordinaten

[1] $-6 + r_1 - 3 s_1 = 1 + 3 r_2 + s_2$ $\rightarrow r_1 - 3 s_1 - 3 r_2 - s_2 = 7$

[2] $-3 + 5 r_1 = 11 + 6 r_2 - s_2$ $\rightarrow 5 r_1 - 6 r_2 + s_2 = 14$

[3] $-5 + 4 r_1 - 2 s_1 = 1 + 4 r_2 + 2 s_2$ $\rightarrow 4 r_1 - 2 s_1 - 4 r_2 - 2 s_2 = 6$ $\rightarrow 2 r_1 - s_1 - 2 r_2 - s_2 = 3$

	r_1	s_1	r_2	s_2		
[1]	1	-3	-3	-1	7	
[2]	5	0	-6	1	14	
[3]	2	-1	-2	-1	3	
---						
[1]	1	-3	-3	-1	7	
[2']	0	-15	-9	-6	21	| = [1] · 5 -[2]
[3']	0	-5	-4	-1	11	| = [1] · 2 -[3]
---						
[1]	1	-3	-3	-1	7	
[2'']	0	-5	-3	-2	7	| = [2'] / 3
[3'']	0	0	3	-3	-12	| = [2'] - 3 · [3']

r_2 als freier Parameter gewählt, in t umbenannt: $r_2 = t$

[3''] $\rightarrow s_2 = 4 + r_2 \rightarrow s_2 = 4 + t$

mit E_2: Schnittgerade $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1+3t+4+t\\11+6t-4-t\\1+4t+8+2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

[2'']: $-5 s_1 - 3 t - 2 (4 + t) = 7 \rightarrow s_1 = -3 - t$

[1]: $r_1 - 3(-3 - t) - 3 t - (4 + t) = 7 \rightarrow r_1 = 2 + t$

mit E1: Schnittgerade $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-6+(2+t)-3(-3-t)\\-3+5(2+t)\\-5+4(2+t)-2(-3-t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

"Spielerei am Ende": Subtrahieren wir vom Aufpunkt der Schnittgeraden 1-mal den Richtungsvektor, erhalten wir ein "ganz schönes" Endergebnis.

g_S: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

Rechnungen zu Weg B

Lineare Abhängigkeit mit der Determinante untersucht.

(1) Parallele Ebenen

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\}$: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 5\cdot(-20) + 4\cdot(-30) = 0$

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\}$: $\begin{vmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-3)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 20 + (-2)\cdot(-30) = 0$

Also parallel oder identisch

$\{(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\}$: $\begin{vmatrix} -7 & -14 & -6 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-7)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - (-14)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-6)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

$= (-7)\cdot 20 - (-14)\cdot (-20) + (-6)\cdot(-30) = -240 \neq 0$

Also nicht identisch $\rightarrow$ nur parallel

(2) Identische Ebenen

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\}$ und $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\}$ - wie bei (1)

$\{(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\}$: $\begin{vmatrix} -13 & -5 & -12 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-13)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - (-5)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-12)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

$= (-13)\cdot 20 - (-5)\cdot (-20) + (-12)\cdot(-30) = 0$

Also auch identisch

(3) Schnittgerade

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\}$: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 16 - 5\cdot 2 + 4\cdot(-9) = -30 \neq 0$

Eigentlich sind wir damit schon fertig! $\rightarrow$ Nicht parallel.

(Die zwei restlichen Rechnungen nur als Illustration)

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\}$: $\begin{vmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 16 + (-2)\cdot(-9) = -30 \neq 0$

$\{(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1\}$: $\begin{vmatrix} -7 & -14 & -6 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-7)\cdot\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-14)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-6)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-7)\cdot 16 - (-14)\cdot 2 + (-6)\cdot(-9) = -30 \neq 0$