Analytische Geometrie - Lagebeziehungen Ebene / Ebene

Teil 2 Normalenform

Möglichkeiten:

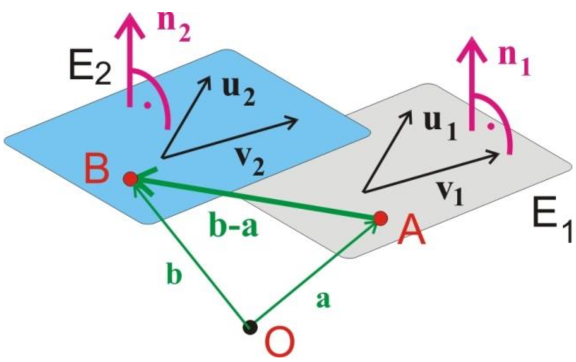
(1) Ebenen parallel zueinander (aber <u>nicht</u> E_1 in E_2)
(2) Identische Ebenen, (E_1 <u>in</u> E_2)
(3) Die Ebenen schneiden sich (Schnittgerade g_S)

E_1: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_1} = 0$; E_2: $(\mathbf{x} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n_2} = 0$; g_S: $\mathbf{x} = \mathbf{c} + t\,\mathbf{u}$

Die beiden Normalen auf die Ebenen sind in der Normalenform bekannt.

Bei parallelen (oder identischen) Ebenen liegen diese parallel.

Die Ebenen sind identisch, falls zusätzlich jeweils ein Aufpunkt einer Ebene in der anderen liegt. Äquivalent dazu ist die Aussage, dass der Verbindungsvektor der Aufpunkte auch in diesen Ebenen liegen muss und daher senkrecht zu den Normalen liegen muss.



1. Überprüfung, ob parallel oder identisch

Zwei Ebenen sind parallel (oder identisch), falls die Normalen parallel sind.

a) $\mathbf{n_1} = t\,\mathbf{n_2}$ (nicht $\mathbf{n_1} = \mathbf{n_2}$; parallele Vektoren können verschiedene Länge haben oder gegenseitig orientiert sein!) Lineares Gleichungssystem, t muss für <u>alle</u> 3 Komponenten gleich sein.

b) $\mathbf{n_1^o} = \pm\,\mathbf{n_2^o}$ Berechnung der Beträge $|\mathbf{n_1}|$ und $|\mathbf{n_2}|$ nötig

c) Äquivalent zu b): $|\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2}| = |\mathbf{n_1}| \cdot |\mathbf{n_2}|$ (Betrag, weil das Skalarprodukt auch negativ sein kann; Gleichheit, weil $\cos(\varphi) = \cos(0°) = 1$

d) $|\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}| = 0$ (weil $\sin(0°) = 0$)

2. Überprüfung, ob identisch (nur sinnvoll, falls bei 1. "parallel" gefunden)

Zwei Ebenen sind identisch, wenn ein Punkt - z.B. der Aufpunkt - einer Ebene auch in der anderen liegt. Wenn die Ebenen parallel liegen, sind sie dann identisch.

b liegt in E_1: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_1} = 0 \rightarrow (\mathbf{b} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_1} = 0$ (oder umgekehrt **a** in E_2)
Äquivalente Überlegung: Wenn **a** und **b** in derselben Ebene liegen,
muss **b** - **a** orthogonal zur Normalen dieser Ebene sein, also auch $(\mathbf{b} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_1} = 0$
(In der Herleitung der Normalenform wurde genau diese Überlegung auch benutzt!)

3. Suche der Schnittgeraden (falls nicht "parallel")

a) g_S muss in E_1 und in E_2 liegen. Für ein **x** die Koordinaten-Gleichungen für E_1 und E_2 anschreiben. Damit liegen 2 Gleichungen für 3 Unbekannte (die 3 Koordinaten von **x**) vor. Eine der Koordinaten wird als Parameter t (oder ein Vielfaches von t) formuliert. Dann lassen sich die beiden Gleichungen lösen. Man erhält **x**, wobei die Koordinaten den Parameter t enthalten. Aufspalten liefert die Form g_S: $\mathbf{x} = \mathbf{c} + t\,\mathbf{u}$. (Der freie Parameter bleibt hier also erhalten! Er liefert den freien Parameter der Parameterform der Schnittgeraden g_S.)

b1) Der Richtungsvektor der Schnittgeraden steht senkrecht auf $\mathbf{n_1}$ und $\mathbf{n_2}$!
$\mathbf{u} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$ (parameterfrei) oder $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n_1} = 0$ und $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n_2} = 0$ (1 freier Parameter, dieser sollte dann mit irgendeiner "passenden" Zahl ersetzt werden)

b2) Der Aufpunkt **c** der Schnittgeraden muss in E_1 <u>und</u> in E_2 liegen.
$(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n_1} = 0$ und $(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n_2} = 0$ (1 freier Parameter. Der freie Parameter wird benutzt, um einen Aufpunkt mit "schönen" Zahlen festzulegen.)
Das mehrfache Vorkommen eines freien Parameters - einmal in den Zwischenschritten und dann in der endgültigen Angabe der Parameterform der Schnittgeraden g_S - ist eher verwirrend!

(1) Parallele Ebenen

E_1: $\left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$; E_2: $\left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Man sieht: $\mathbf{n_1}$ sollte man - für einfachere Rechnungen - durch 2 kürzen! $\mathbf{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

1.a) Ansatz $\mathbf{n_2} = t\,\mathbf{n_1}$; ohne Rechnung sieht man $\mathbf{n_2} = -\mathbf{n_1}$
$\rightarrow$ Die Ebenen sind parallel (oder identisch)
Man könnte bei $\mathbf{n_2}$ das Vorzeichen ändern, dann ist $\mathbf{n_1} = \mathbf{n_2}$.

1.b) $|\mathbf{n_1}| = \sqrt{17} = 2\sqrt{17}$; $|\mathbf{n_2}| = \sqrt{17}$; $\mathbf{n_1}^{\mathbf{o}} = -\,\mathbf{n_2}^{\mathbf{o}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
$\rightarrow$ "parallel"

1.c) $|\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}| = |-4 -4 -9| = 17$; $|\mathbf{n_1}| \cdot |\mathbf{n_2}| = 2\sqrt{17} \cdot \sqrt{17} = 17$
$\rightarrow$ "parallel"

1.d) $\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} - 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$
$\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$ = Nullvektor, Betrag $|\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}| = 0 \rightarrow$ "parallel"
Schon ohne die Entwicklung kann man wegen zweier, bis auf das Vorzeichen, gleicher Zeilen den Wert 0 erkennen.

2.a) $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1-(-6)=7 \\ 11-(-3)=14 \\ 1-(-5)=6 \end{pmatrix}$; $(\mathbf{b} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_1} = 7 \cdot 2 + 14 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) = 24 \neq 0$

$\rightarrow$ nicht identisch

Die Rechnung 3) für die Schnittgerade wäre nicht mehr nötig! Nur zur Illustration!

3.a) $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_1} = 0$: $(x+6) \cdot 2 + (y+3) \cdot 2 + (z+5) \cdot (-3) = 2x + 2y - 3z + 3 = 0$

$(\mathbf{x} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n_2} = 0$: $(x-1) \cdot (-2) + (y-11) \cdot (-2) + (z-1) \cdot 3 = -2x - 2y + 3z + 21 = 0$

Nach Addition folgt ein Widerspruch (24 = 0)

$\rightarrow$ Es gibt keine Schnittgerade

3.b) $\mathbf{u} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$ schon bei 1.d) berechnet, Nullvektor.

Das Gleichungssystem $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n_1} = 0$ und $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n_2} = 0$ als alternativer Rechenweg:

$u_x \cdot 2 + u_y \cdot 2 - u_z \cdot (-3) = 0$

$- u_x \cdot 2 - u_y \cdot 2 + u_z \cdot 3 = 0$

Eine Gleichung ist das Negative der anderen, die Addition liefert 0 = 0.

$\rightarrow$ Es gibt keine eindeutige Normale für die Schnittgerade.

Auch diese Rechnung ist eigentlich sinnlos. Der Nullvektor steht senkrecht auf jedem anderen Vektor.

Das Gleichungssystem $(\mathbf{c} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_1} = 0$ und $(\mathbf{c} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n_2} = 0$ ist:

$(c_x+6) \cdot 2 + (c_y+3) \cdot 2 + (c_z+5) \cdot (-3) = 2c_x + 2c_y - 3c_z + 3 = 0$

$(c_x-1) \cdot (-2) + (c_y-11) \cdot (-2) + (c_z-1) \cdot 3 = -2c_x - 2c_y + 3c_z + 21 = 0$

Nach Addition folgt ein Widerspruch (24 = 0)

$\rightarrow$ Es gibt keine Schnittgerade

Die Durchführung dieser Rechnung 3. ist bei parallelen Ebenen also eher Unfug!

(2) Identische Ebenen

E_1: $\left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$; E_2: $\left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

1.a) - 1.d) : identisch zu (1)

2.a) $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 7-(-6)=13 \\ 2-(-3)=5 \\ 7-(-5)=12 \end{pmatrix}$; $(\mathbf{b} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_1} = 13 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 12 \cdot (-3) = 0$

$\rightarrow$ identische Ebenen

Die Rechnung 3) für die Schnittgerade ist sinnlos.

(3) Schnittgerade

E_1: $\left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix}-6\\-3\\-5\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix} = 0$; E_2: $\left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix}1\\11\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}16\\-2\\-9\end{pmatrix} = 0$

1.a) Ansatz $\mathbf{n_2} = t\ \mathbf{n_1}$; es gibt kein t, das für alle Koordinaten gilt.
$16 = 8 \cdot 2$, aber $-2 \neq 8 \cdot 1 \rightarrow$ Die Ebenen sind nicht parallel

1.b) $|\mathbf{n_1}| = \sqrt{17}$; $|\mathbf{n_2}| = \sqrt{341}$; $\mathbf{n_1}^{\mathbf{o}} \neq -\ \mathbf{n_2}^{\mathbf{o}}$ schon für die x- und y-Koordinate,
x: $\approx 0{,}49 \neq \approx 0{,}87$; y: $\approx 0{,}49 \neq \approx -0{,}11 \rightarrow$ nicht "parallel"

1.c) $|\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}| = |32 - 4 + 27| = 55$; $|\mathbf{n_1}| \cdot |\mathbf{n_2}| = \sqrt{17} \cdot \sqrt{341} \approx 76 \rightarrow$ nicht "parallel"

1.d) $\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 2 & -3\\ 16 & -2 & -9\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & -9\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 16 & -9\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 16 & -2\end{vmatrix}$
$= -24\ \mathbf{i} - 30\ \mathbf{j} - 36\ \mathbf{k}$
Betrag davon $> 0 \rightarrow$ nicht "parallel"

2. Diese Rechnung wäre jetzt nicht mehr nötig! Nur zur Illustration
$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}1-(-6)=7\\ 11-(-3)=14\\ 1-(-5)=6\end{pmatrix}$; $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n_1} = 7 \cdot 2 + 14 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) = 24 \neq 0$
$\rightarrow$ nicht identisch

3.a) Suche nach der Schnittgeraden in 1 Schritt
x ist ein allgemeiner Punkt, dieser darf einen Parameter enthalten!
(Er <u>muss</u> dies sogar, weil der allgemeine Punkt eine Gerade darstellen soll, und diese besitzt einen freien Parameter!)
$(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n_1} = 0$: $(x+6) \cdot 2 + (y+3) \cdot 2 + (z+5) \cdot (-3) = 0$
$(\mathbf{x} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n_2} = 0$: $(x-1) \cdot 16 + (y-11) \cdot (-2) + (z-1) \cdot (-9) = 0$
[1] $2x + 2y - 3z + 3 = 0$
[2] $16x - 2y - 9z + 15 = 0$
2 Gleichungen mit 3 Unbekannten. 1 freier Parameter. Wahl $z = t$
[1]: $2y = -2x + 3t - 3$
[1] + [2]: $18x - 12t + 18 = 0 \rightarrow x = 2/3\ t - 1 \rightarrow y = 5/6\ t - 1/2$
$\rightarrow$
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}2t/3 - 1\\ 5t/6 - 1/2\\ t\end{pmatrix}$; t bleibt bestehen. aufgespalten: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-1\\ -1/2\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2/3\\ 5/6\\ 1\end{pmatrix}$
Für "schöne" Zahlen wird zum Aufpunkt das 3-fache des Richtungsvektors addiert und dann der Richtungsvektor mit 6 multipliziert: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$
Die Schnittgerade ist dann g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$
(Die letzten Umformungen waren selbstverständlich nur - obwohl beabsichtigt - etwas "Spielerei"!)

3.b1) $\mathbf{u} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{pmatrix} -24 \\ -30 \\ -36 \end{pmatrix}$ (siehe 1.d); gekürzt auf "schöne" Zahlen $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Das Gleichungssystem $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n_1} = 0$ und $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n_2} = 0$ als alternativer Rechenweg:

$u_x \cdot 2 + u_y \cdot 2 + u_z \cdot (-3) = 0$

$u_x \cdot 16 + u_y \cdot (-2) + u_z \cdot (-9) = 0$

2 Gleichungen mit 3 Unbekannten. 1 freier Parameter. Wahl $u_z = t$.

$2\ u_y = -\ 2\ u_x + 3\ t$

$16\ u_x + 2\ u_x - 3\ t - 9\ t = 0 \rightarrow u_x = 2/3\ t \rightarrow u_y = 5/6\ t$

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2t/3 \\ 5t/6 \\ t \end{pmatrix}$; mit "schönen" Zahlen (t = 6) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

3.b2 Aufpunkt: Gleichungssystem $(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n_1} = 0$ und $(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n_2} = 0$:

$(c_x + 6) \cdot 2 + (c_y + 3) \cdot 2 + (c_z + 5) \cdot (-3) = 2\ c_x + 2\ c_y - 3\ c_z + 3 = 0$

$(c_x - 1) \cdot 16 + (c_y - 11) \cdot (-2) + (c_z - 1) \cdot (-9) = 16\ c_x - 2\ c_y - 9\ c_z + 15 = 0$

2 Gleichungen mit 3 Unbekannten. 1 freier Parameter. Wahl $c_z = t$

$2\ c_y = -\ 2\ c_x + 3\ t - 3$

$16\ c_x + 2\ c_x - 3\ t + 3 - 9\ t + 15 = 0 \rightarrow c_x = 2/3\ t - 1 \rightarrow c_y = 5/6\ t - 1/2$

$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2t/3 - 1 \\ 5t/6 - 1/2 \\ t \end{pmatrix}$; mit t = 3: $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Zusammengefasst ist die <u>Schnittgerade</u> g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Anmerkung: 1.a) und 3.a) sind der Weg mit dem geringsten Rechenaufwand. Die anderen Varianten sind von den Ideen her interessant, aber in der Durchführung umfangreicher.