Analytische Geometrie - Lagebeziehungen Ebene / Ebene

Teil 3 Koordinatengleichung / gemischte Formen

PF = Parameterform, NF = Normalenform, KG = Koordinatengleichung

Möglichkeiten:

(1) Ebenen parallel zueinander (aber nicht E_1 in E_2)
(2) Identische Ebenen, (E_1 in E_2)
(3) Die Ebenen schneiden sich (Schnittgerade g_S)

KG / KG

E_1: $A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1 = 0$; E_2: $A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2 = 0$; g_S: $\mathbf{x} = \mathbf{c} + t\,\mathbf{u}$

Vorbemerkung: Ein gemeinsamer Faktor einer Koordinatengleichung wird am besten vorher gekürzt.

1. Überprüfung, ob parallel oder identisch

Die Normale ist direkt aus den Koeffizienten (A, B, C) ablesbar.
Damit ist das Kriterium $\mathbf{n_1} = t\,\mathbf{n_2}$ für die Parallelität anwendbar.
Einfacher: Die Koeffizienten der einen Ebene sind ein Vielfaches (oder gleich) der Koeffizienten der anderen.

2. Überprüfung, ob identisch (nur sinnvoll, falls bei 1. "parallel" gefunden)

Ein Punkt einer Ebene liegt auch in der anderen liegt. Z.B. **b** aus E_2 in E_1: $(\mathbf{b} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_1} = 0$.
Viel einfacher: Eine Gleichung ist komplett ein Vielfaches (oder gleich) der anderen.

3. Suche der Schnittgeraden (falls nicht "parallel")

$(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_1} = 0$ und $(\mathbf{x} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n_2} = 0$. Lösung enthält 1 freien Parameter.
Das muss so sein, weil die Lösung eine Parameterform der Schnittgeraden liefert.

In der angeschriebenen Form müssten **a** und **b** berechnet werden. Das ist möglich, aber gar nicht nötig! $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_1} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n_1} = 0$.
Vergleich mit der Koordinatengleichung zeigt $D_1 = -\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{n_1}$.

Äquivalent dazu ist: Die beiden Koordinatengleichungen liefern 2 Gleichungen mit drei Variablen (x, y, z). Eine Koordinate wird als freier Parameter betrachtet. Die Lösung liefert den Zusammenhang der beiden anderen Koordinaten mit dem Parameter. Geordnet liefert das die Gleichung von g_S.

(1) Parallele Ebenen

E_1: $4\,x + 4\,y - 6\,z + 6 = 0$; E_2: $-2\,x - 2\,y + 3\,z + 21 = 0$

E_1 wird gekürzt: E_1: $2\,x + 2\,y - 3\,z + 3 = 0$

Die Koeffizienten von E_2 sind das Negative der Koeffizienten von E_1, aber die gesamte Gleichung nicht ein Vielfaches: : $\Rightarrow$ parallel, nicht identisch

(2) Identische Ebenen

E_1: 2 x + 2 y - 3 z + 3 = 0; E_2: -2 x - 2 y + 3 z - 3 = 0

Die gesamte Gleichung von E_2 ist das Negative der Gleichung von E_1: $\Rightarrow$ <u>identisch</u>

(3) Schnittgerade

E_1: 2 x + 2 y - 3 z + 3 = 0; E_2: 16 x - 2 y - 9 z + 15 = 0

Die Koeffizienten von E_2 sind kein Vielfaches der Koeffizienten von E_1 → nicht parallel

Als Parameter z = t

[1] 2 x + 2 y- 3 t + 3 = 0
[2] 16 x -2 y - 9 t + 15 = 0
[1]: 2 y = -2 x + 3 t - 3 → [1] + [2]: 18 x - 12 t + 18 = 0
→ x = 2/3 t - 1 → y = -2/3 t + 1 + 3/2 t - 3/2 = 5/6 t - 1/2

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2t/3 - 1 \\ 5t/6 - 1/2 \\ t \end{pmatrix}$; aufgespalten: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wenn man will, kann man das noch in eine "schöne" Form bringen.
(Durchführung siehe "Normalenform")

Schnittgerade g_S: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

KG / NF

E_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$; E_2: $(\mathbf{x} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n_2} = 0$; g_S: $\mathbf{x} = \mathbf{c} + t\,\mathbf{u}$

(1) parallel: $\mathbf{n_1}$ und $\mathbf{n_2}$ sind bekannt, prüfen auf lineare Abhängigkeit

(2) identisch: E_2: $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n_2} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{n_2} = 0$ als Koordinatengleichung anschreiben.
Prüfen, ob gesamte Gleichung ein Vielfaches von E_1

(3) Schnittgerade: E_2: $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n_2} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{n_2} = 0$ als Koordinatengleichung anschreiben. 2 Gleichungen für 2 Koordinaten, 3. Gleichung als freier Parameter

→ Detailrechnungen wie bei KG/KG

KG / PF

E_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0; E_2: **x** = **b** + r_2 $\mathbf{u_2}$ + s_2 $\mathbf{v_2}$; g_S: **x** = **c** + t **u**

(1) parallel: $\mathbf{n_2} = \mathbf{u_2} \times \mathbf{v_2}$. Prüfen auf lineare Abhängigkeit $\mathbf{n_2}$ von $\mathbf{n_1}$.

(2) identisch: **b** einsetzen in E_1. Prüfen, ob Gleichung erfüllt ist.

(3) Schnittgerade: Für die Rechnung umbenannt: r_2 in r, s_2 in s
   a) Die Parameterform E_2 liefert 3 Gleichungen für die Koordinaten mit den Parametern r und s
   b) Die erhaltenen Ausdrücke für {x, y, z} einsetzen in KG von E1. Dies liefert 1 Gleichung, diese nach r (oder s) auflösen.
   c) Diesen Zusammenhang einsetzen in die Koordinaten von Schritt a)
   d) Geordnet liefert das die Parametergleichung für g_S. Den freien Parameter r (oder s) in t umbenennen. Eventuell auf "schöne" Zahlen umformen.

Beispiel mit Schnittgerade

E_1: 2 x + 2 y - 3 z + 3 = 0; E_2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) x = 1 + 3 r + s / y = 11 + 6 r -s / z = 1 + 4 r + 2 s

b) E_1: 2 x + 2 y - 3 z + 3 = 0 → 2 (1 + 3 r + s) + 2 (11 + 6 r -s) - 3 (1 + 4 r + 2 s) + 3 = 0
→ 6 r - 6 s + 24 = 0 → s = r + 4

c) x = 1 + 3 r + r + 4
y = 11 + 6 r - r - 4
z = 1 + 4 r + 2 r + 8

geordnet: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) Für eine "schöne" Endform wird r in t umbenannt und von **c** 1-mal **u** subtrahiert.

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

PF / NF

E_1: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r_1\,\mathbf{u_1} + s_1\,\mathbf{v_1}$; E_2: $(\mathbf{x} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n_2} = 0$; g_S: $\mathbf{x} = \mathbf{c} + t\,\mathbf{u}$

(1) parallel: $\mathbf{n_1} = \mathbf{u_1} \times \mathbf{v_1}$. Prüfen auf lineare Abhängigkeit $\mathbf{n_2}$ von $\mathbf{n_1}$.

(2) identisch: **a** einsetzen in E_2. Prüfen, ob Gleichung erfüllt ist.

(3) Schnittgerade: E_1 kann einfach in eine NF umgerechnet werden. $\mathbf{n_1}$ - aus Schritt (1) - und **a** sind bekannt. Dann ist das Gleichungssystem für die Komponenten zu lösen.
$\rightarrow$ Detailrechnungen wie bei "Normalenform"

Ein alternatives Verfahren wird beim Beispiel gerechnet.
Es liefert aber keinen wesentlich kürzeren Rechenweg!

Beispiel mit Schnittgerade

E_1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\-5\end{pmatrix} + r_1\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix}$; E_2: $\left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix}1\\11\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}16\\-2\\-9\end{pmatrix} = 0$

$\mathbf{n_1} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 5 & 4\\ -3 & 0 & -2\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}5 & 4\\ 0 & -2\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}1 & 4\\ -3 & -2\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}1 & 5\\ -3 & 0\end{vmatrix} = -10\,\mathbf{i} - 10\,\mathbf{j} + 15\,\mathbf{k}$

$\mathbf{n_1} = \begin{pmatrix}-10\\-10\\15\end{pmatrix} \rightarrow$ "schöne" Zahlen: $\mathbf{n_1} = \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$

Daraus folgt dasselbe Gleichungssystem wie im Teil "Normalenform"

$(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_1} = 0$: $(x + 6) \cdot 2 + (y + 3) \cdot 2 + (z + 5) \cdot (-3) = 0$

$(\mathbf{x} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n_2} = 0$: $(x - 1) \cdot 16 + (y - 11) \cdot (-2) + (z - 1) \cdot (-9) = 0$

Ein *alternatives Verfahren* setzt E_1 in E_2 ein.

$\mathbf{x} = \mathbf{a} + r_1\,\mathbf{u_1} + s_1\,\mathbf{v_1}$ in $(\mathbf{x} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{n_2} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{n_2} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{n_2} = 0$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n_2} + r_1\,\mathbf{u_1}\cdot\mathbf{n_2} + s_1\,\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{n_2} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{n_2} = 0$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n_2} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}16\\-2\\-9\end{pmatrix} = -96 + 6 + 45 = -45$ $\qquad \mathbf{u_1}\cdot\mathbf{n_2} = \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}16\\-2\\-9\end{pmatrix} = 16 - 10 - 36 = -30$

$\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{n_2} = \begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}16\\-2\\-9\end{pmatrix} = -48 + 18 = -30$ $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n_2} = \begin{pmatrix}1\\11\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}16\\-2\\-9\end{pmatrix} = 16 - 22 - 9 = -15$

$-45 - 30\,r - 30\,s + 15 = 0 \rightarrow r + s + 1 = 0 \rightarrow s = -r - 1 \rightarrow$ eingesetzt in E_1 (PF):

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-6 + r + 3r + 3\\ -3 + 5r\\ -5 + 4r + 2r + 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

Mit der Umbenennung $r \rightarrow t$ und Addition von **u** zu **c** das "schöne" $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$