Analytische Geometrie - Schnittwinkel

1. Möglichkeiten und Formeln

Gerade / Gerade:	$\cos(\varphi) = \frac{\lvert\mathbf{u_1}\cdot\mathbf{u_2}\rvert}{\lvert\mathbf{u_1}\rvert\,\lvert\mathbf{u_2}\rvert}$	$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ Richtungsvektoren der Geraden
Gerade / Ebene:	$\sin(\varphi) = \frac{\lvert\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\rvert}{\lvert\mathbf{n}\rvert\,\lvert\mathbf{u}\rvert}$	**n** Normale auf die Ebene **u** Richtungsvektor der Geraden "**Sinus**" ist **richtig**!
Ebene / Ebene:	$\cos(\varphi) = \frac{\lvert\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2}\rvert}{\lvert\mathbf{n_1}\rvert\,\lvert\mathbf{n_2}\rvert}$	$\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$ Normalen auf die Ebenen

2. Herleitung und weitere Hinweise

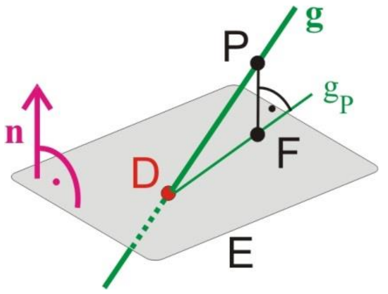
Gerade / Gerade

- Die Formel gilt für R^2 und R^3.
- Für R^3 ist nur die Parameterdarstellung möglich. **u** ist damit bekannt.
- Für R^2 ist **n** leicht in **u** umrechenbar (Koordinatenvertauschung und 1 Vorzeichenwechsel). Falls zweimal n bekannt ist (Normalenform oder Koordinatengleichung) kann in der Formel **u** durch **n** ersetzt werden.
- Der Fall paralleler (und damit auch identischer) Geraden ist in der Formel enthalten: Dann ist $\cos(\varphi) = \lvert\mathbf{u_1}\cdot\mathbf{u_1}\rvert / \lvert\mathbf{u_1}\rvert^2 = 1$ und damit $\varphi = 0°$.
- Eine Division durch 0 ist ausgeschlossen, da ein Richtungsvektor **0** für eine Gerade nicht erlaubt ist. Damit ist auch das formal Mögliche "0/0" nicht erlaubt.
- Der Betrag des Skalarprodukts wird verwendet, weil üblicherweise als Schnittwinkel der kleinere der zwei möglichen Schnittwinkel zwischen zwei Geraden (φ und $180° - \varphi$) angegeben wird. Wegen $\cos(180° - \varphi) = -\cos(\varphi)$ wird mit dem Betrag stets direkt φ berechnet.
- Bei windschiefen Geraden gibt es keinen Schnittwinkel, denn diese schneiden sich ja nicht. Die Formel liefert dann den Winkel zwischen beiden Richtungsvektoren. Das wäre der Schnittwinkel, wenn eine Gerade parallel verschoben wird, bis ein Schnittpunkt vorliegt.
- Die Herleitung enthält trivialerweise einfach direkt die Definition des Skalarprodukts.

Gerade / Ebene

- Der Fall, dass die Gerade parallel zur Ebene (oder in der Ebene) liegt, ist in der Formel enthalten. Dann ist $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}$ und das Skalarprodukt ist 0. Damit $\varphi = \arcsin(0) = 0°$.
  (**u** = **0** oder **n** = **0** würde wieder bedeuten, dass keine Gerade oder Ebene vorliegt!)
- Für die Gerade ist **u** bekannt. Falls die Ebene in der Parameterform vorliegt, wird **n** aus den beiden Richtungsvektoren berechnet. (Kreuzprodukt oder Lineares Gleichungssystem für die Koordinaten)
- Als Schnittwinkel ist der Winkel zwischen der Geraden und der senkrechten Projektion der Gerade auf die Ebene definiert. (... das erinnert an das Lotfußpunktverfahren!)

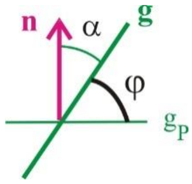
Der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene ist der Durchstoßpunkt D. Zum einem beliebigen Punkt P auf der Geraden g ist der Lotfußpunkt F. Durch D und F geht die Projektionsgerade von g auf E, g_P.



Der gesuchte Schnittwinkel φ ist der Winkel zwischen der Geraden g und der Projektionsgeraden g_P.

(Das lässt sich prinzipiell berechnen! Siehe Beispiel!)

Viel <u>einfacher</u> wird die Rechnung durch eine weitere Überlegung. Ein Schnitt entlang der Projektionsgeraden zeigt den Winkel α zwischen der Geraden g (mit dem Richtungsvektor **u**) und der Normalen **n**. Dieser Winkel kann als Winkel zwischen 2 Geraden berechnet werden. $\{\cos(\alpha) = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|/(|\mathbf{n}|\ |\mathbf{u}|)\}$.



Durch den Betrag ist wieder sichergestellt, dass nicht der stumpfe Winkel erhalten wird. Der Schnittwinkel φ ist offenkundig $\varphi = 90° - \alpha$. Also $\cos(\alpha) = \cos(90° - \varphi) = \sin(\varphi)$.

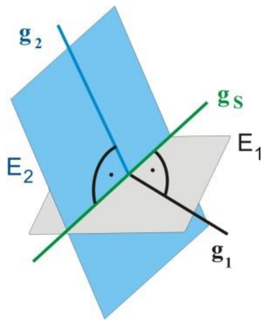
Weil für die Ebene **n** gegeben ist oder schnell aus den Richtungsvektoren errechnet werden kann, erfordert diese Endformel weniger Rechenaufwand als ein Lotfußpunktverfahren.

Ebene / Ebene

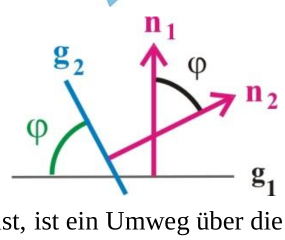
- Für die Ebenen ist **n** gegeben oder kann schnell aus den Richtungsvektoren errechnet werden.
- Mit dem Betrag wird ein Schnittwinkel zwischen 0° und 90° erhalten.
- Der Fall paralleler (oder identischer) Ebenen ist berücksichtigt. Dann wird $\cos(\varphi) = 1$, also $\varphi = 0$.
- Als Schnittwinkel ist der Winkel zwischen zwei Geraden, die in E_1 und E_2 liegen <u>und</u> senkrecht auf der Schnittgeraden g_S stehen, definiert.

Zwei Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich in der Schnittgeraden g_S.
Orthogonal zu g_S liegen die Geraden g_1 in E_1 und g_2 in E_2.
Der Winkel zwischen g_1 und g_2 ist mit dem Skalarprodukt berechenbar.

(Eine Berechnung nach diesen geometrischen Überlegungen ist prinzipiell möglich! Siehe Beispiel!)



<u>Einfacher</u> wird die Rechnung mit einer kurzen Überlegung! Die Normalen auf die Ebenen stehen auch senkrecht auf den vorher definierten Geraden g_1 und g_2. Der Winkel zwischen den Normalen ist also gleich dem Winkel zwischen den Geraden



Wenn die Ebene in der Normalenform oder als Koordinatengleichung gegeben ist, ist ein Umweg über die Geraden g_S, g_1 und g_2 wenig sinnvoll!

3. Beispiele

3.1 Gerade / Gerade

3.1.1 R^3

g_1: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$; g_2: $\mathbf{x} = \mathbf{b} + s\,\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-8\\-7\\-6\end{pmatrix}$

$\mathbf{u_1}\cdot\mathbf{u_2} = -103$; $|\mathbf{u_1}| = \sqrt{77}$; $|\mathbf{u_2}| = \sqrt{149}$; $\cos(\varphi) = 0{,}962$; $\varphi = 15{,}93°$

3.1.2 R^2

g_1: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u_1} = \binom{1}{2} + r\binom{3}{4}$; g_2: $\mathbf{x} = \mathbf{b} + s\,\mathbf{u_2} = \binom{5}{-6} + r\binom{7}{-8}$

$\mathbf{u_1}\cdot\mathbf{u_2} = -11$; $|\mathbf{u_1}| = 5$; $|\mathbf{u_2}| = \sqrt{113}$; $\cos(\varphi) = 0{,}207$; $\varphi = 78{,}06°$

Vergleich: Die Rechnung mit Normalen liefert das gleiche Ergebnis:

$\mathbf{n_1} = \binom{-4}{3}$; $\mathbf{n_2} = \binom{8}{7}$; $\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2} = -11$; $|\mathbf{n_1}| = 5$; $|\mathbf{n_2}| = \sqrt{113}$

3.1.3 R^2

Wenn die Gerade in der Punkt-Steigungs-Form $y = m\,x + b$ gegeben ist, schreibt man dies in die allgemeine Form $A\,x + B\,y + C = 0$. In der allgemeinen Form kann man die Normale direkt ablesen, $\mathbf{n} = \binom{A}{B}$.

3.2 Gerade / Ebene

3.2.1 Standardvorgehen - Anwendung der Formel

E: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{v} + s\,\mathbf{w} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}$; g: $\mathbf{x} = \mathbf{b} + t\,\mathbf{u} = \begin{pmatrix}5\\3\\13\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix}$

Normale $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix}i & j & k\\4 & 5 & 6\\6 & 5 & 4\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}5 & 6\\5 & 4\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}4 & 6\\6 & 4\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}4 & 5\\6 & 5\end{vmatrix} = -10\,\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j} - 10\,\mathbf{k}$

mit "schönen" Zahlen: $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix} = -12$; $|\mathbf{n}| = \sqrt{6}$; $|\mathbf{u}| = \sqrt{42}$; $\sin(\varphi) = 0{,}756$; $\varphi = 49{,}11°$

Anmerkung: g in R^3 ist stets in der Parameterform angegeben, **u** also direkt ablesbar. Wenn E in der Normalenform oder der Koordinatengleichung angegeben ist, ist **n** auch direkt ablesbar.

3.2.2 Schrittweise mit Lotfußpunkt. NUR zum Vergleich!

1) **n** berechnen. (Eventuell "schöne" Zahlen erzeugen)
2) Durchstoßpunkt D (=Schnittpunkt Gerade / Ebene) berechnen.
   Wenn die Ebene in der Parameterform gegeben ist, "umrechnen" in die Normalenform!
   (Das ist 1 kurzer Schritt, weil Aufpunkt und Normale vorliegen!)
   In der Normalenform ist D am schnellsten berechenbar!
   (Nur 1 Parameter! Mit der Parameterform wären es 2 Parameter!)

3) Irgendeinen Punkt P auf g wählen, z.B. Aufpunkt .
Gerade durch P mit Richtungsvektor **n**
Schnitt dieser Geraden mit E - am schnellsten in der Normalenform!
Das liefert den Lotfußpunkt F.

4) Aus D und F Richtungsvektor $\overrightarrow{DF}$ berechnen. (Eventuell "schöne" Zahlen erzeugen)
($\overrightarrow{DF}$ ist die Projektionsgerade)

5) Aus den Richtungsvektoren **u** (von g) und $\overrightarrow{DF}$ den Winkel φ berechnen.

1) $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $|\mathbf{n}| = \sqrt{6}$ - Rechnung wie vorher (3.2.1)

2) Normalenform: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0 \rightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ("0" ist hier ein Zufall! Allgemein folgt irgendeine Zahl!)
in $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}$ die Geradengleichung einsetzen: $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} + t\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$
$\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 12$; $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -12$; $12 - 12\,t = 0 \rightarrow t = 1$
Durchstoßpunkt D: $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

3) "Irgendein" Punkt auf g, Aufpunkt gewählt: P(5|3|13).
Gerade von P zum Lotfußpunkt F: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Schnitt dieser Geraden mit der Ebene (am einfachsten in der Normalenform!):
$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 12$; $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6\,\lambda$; $12 + 6\,\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -2$
Damit F: $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$

4) Schnittgerade, Richtungsvektor $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

5) g: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$; $|u| = \sqrt{42}$; Schnittgerade: $|\overrightarrow{DF}| = \sqrt{18}$
$\mathbf{u}\cdot\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 18$; $\cos(\varphi) = 18 / \sqrt{18 \cdot 42} = 0{,}655$; $\varphi = 49{,}11°$

3.3 Ebene / Ebene

3.3.1 Standardvorgehen - Anwendung der Formel

E_1: $\mathbf{x} = \mathbf{a_1} + r_1\,\mathbf{v_1} + s_1\,\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r_1\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}$

E_2: $\mathbf{x} = \mathbf{a_2} + r_2\,\mathbf{v_2} + s_2\,\mathbf{w_2} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-4\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}-4\\5\\6\end{pmatrix}$;

$$\mathbf{n_1} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 4 & 5 & 6\\ 6 & 5 & 4\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}5 & 6\\5 & 4\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}4 & 6\\6 & 4\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}4 & 5\\6 & 5\end{vmatrix} = -10\,\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j} - 10\,\mathbf{k} \rightarrow \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n_2} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -2 & 3\\ -4 & 5 & 6\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}-2 & 3\\5 & 6\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}1 & 3\\-4 & 6\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}1 & -2\\-4 & 5\end{vmatrix} = -27\,\mathbf{i} - 18\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k} \rightarrow \begin{pmatrix}9\\6\\1\end{pmatrix}$$

$\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2} = -2$; $|\mathbf{n_1}| = \sqrt{6}$; $|\mathbf{n_2}| = \sqrt{118}$; $\cos(\varphi) = 0{,}0752 \rightarrow \varphi = 85{,}69°$

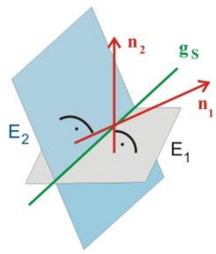
(Alternativ kann man ohne Kreuzprodukt durch die Skalarprodukte mit den Richtungsvektoren der Ebenen, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0$ und $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0$, eine Darstellung von $\mathbf{n}$ - mit 1 freiem Parameter erhalten. Siehe Seite G03!)

3.3.2 Schrittweise mit 2 Geraden ⊥ Schnittgerade. <u>NUR</u> zum Vergleich!

Falls die Ebene in der Normalenform oder als Koordinatengleichung gegeben ist, könnte man bei 3) zwei Richtungsvektoren aus den Normalen errechnen.

1) Schnittgerade g_S

Benötigt wird nicht die komplette Geradengleichung, sondern nur der Richtungsvektor von g_S.
Der Richtungsvektor von g_S steht senkrecht auf den Normalen der beiden Ebenen, $\mathbf{u_S} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$
Berechnung der Normalen $\mathbf{n_1}$ und $\mathbf{n_2}$ wie vorher (3.3.1)



Das Kreuzprodukt für $\mathbf{u_S}$ ist *geometrisch schnell einzusehen*: Die Schnittgerade g_S liegt in <u>beiden</u> Ebenen. Deren Richtungsvektor $\mathbf{u_S}$ steht damit, wie jeder Vektor der Ebene, senkrecht zur Normalen dazu.
Die Bedingung ist daher $\mathbf{u_S} \perp \mathbf{n_1}$ <u>und</u> $\mathbf{u_S} \perp \mathbf{n_2}$. Das Vektorprodukt erfüllt genau diese Forderung.

Dasselbe lässt sich auch *forma*l erhalten. In der Normalenform sind die beiden Ebenen gegeben durch
E_1: $(\mathbf{x} - \mathbf{a_1})\cdot\mathbf{n_1} = 0$ und E_2: $(\mathbf{x} - \mathbf{a_2})\cdot\mathbf{n_2} = 0$.
Die Schnittgerade g_S: $\mathbf{x} = \mathbf{c} + t\,\mathbf{u_S}$ muss in beiden Ebenen liegen.
Also $(\mathbf{c} + t\,\mathbf{u_S} - \mathbf{a_1})\cdot\mathbf{n_1} = 0$ und $(\mathbf{c} + t\,\mathbf{u_S} - \mathbf{a_2})\cdot\mathbf{n_2} = 0$.
Geordnet folgt $(\mathbf{c} - \mathbf{a_1})\cdot\mathbf{n_1} + t\,\mathbf{u_S}\cdot\mathbf{n_1} = 0$ und $(\mathbf{c} - \mathbf{a_2})\cdot\mathbf{n_2} + t\,\mathbf{u_S}\cdot\mathbf{n_2} = 0$.
Der erste Term ist jeweils 0.
a) weil der Vektor $\mathbf{c} - \mathbf{a_i}$ in der Ebene liegt und damit senkrecht zu $\mathbf{n_i}$, i = 1,2
b) oder anders begründet, weil $\mathbf{c}$ als Punkt in der Ebene auch die jeweilige Ebenengleichung erfüllen muss.
Damit bleibt die Bedingung $\mathbf{u_S}\cdot\mathbf{n_i} = 0$, also wie vorher $\mathbf{u_S} \perp \mathbf{n_1}$ <u>und</u> $\mathbf{u_S} \perp \mathbf{n_2}$.

2) Berechnung $\mathbf{u_S}$ mit dem Kreuzprodukt:

$$\mathbf{u_S} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 9 & 6 & 1\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}-2 & 1\\6 & 1\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\9 & 1\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}1 & -2\\9 & 6\end{vmatrix} = -8\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j} + 24\,\mathbf{k} \rightarrow \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

3) Die Geraden g_1 und g_2 stehen senkrecht auf der Schnittgeraden g_S <u>und</u> liegen in den Ebenen E_1 bzw. E_2. Die Bedingung $\perp g_S$ ist, wie üblich, über das Skalarprodukt berechenbar. <u>In</u> der Ebene liegt ein Vektor, der eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren ist.

g_1: $\left[\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} = 0$

$-4 - 6\,t + 5 + 5\,t + 18 + 12\,t = 0 \rightarrow 11\,t = -19 \rightarrow t = -19 / 11$

$\mathbf{u}(g_1) = \begin{pmatrix}4 - 114/11\\5 - 95/11\\6 - 76/11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-70/11\\-40/11\\-10/11\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}7\\4\\1\end{pmatrix}$; $|\mathbf{u}(g_1)| = \sqrt{66}$

g_2: $\left[\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\5\\6\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} = 0$

$-1 + 4\,t -2 + 5\,t + 9 + 18\,t = 0 \rightarrow 27\,t = -6 \rightarrow t = -2/9$

$\mathbf{u}(g_2) = \begin{pmatrix}1 + 8/9\\-2 - 10/9\\3 - 12/9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17/9\\-28/9\\15/9\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}17\\-28\\15\end{pmatrix}$; $|\mathbf{u}(g_2)| = \sqrt{1298}$

4) Winkel φ zwischen g_1 und g_2 (über Skalarprodukt der Richtungsvektoren):

$\mathbf{u}(g_1)\cdot\mathbf{u}(g_2) = \begin{pmatrix}7\\4\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}17\\-28\\15\end{pmatrix} = 22$; $\cos(\varphi) = 22 / \sqrt{66 \cdot 1298} = 0{,}0752$; $\varphi = 85{,}69°$