Übungen 2

Nr. 1, 2: Allgemeine Überlegungen

1) Die Koordinatendarstellung bezüglich einer Basis ist eindeutig. Basis = $\{\mathbf{b_i}\}$
Koordinaten sind die Koeffizienten der Linearkombination $\mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{b_i}$

2) Bei "Abstand Punkt / Gerade" kann angesetzt werden:
g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u}$ und Punkt P: Ortsvektor $\mathbf{p}$
Der Lotfußpunkt F kann über die Bedingung $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \perp \mathbf{u}$ gefunden werden. Es entsteht eine Bedingung für r und daraus ist F berechenbar.
Ist es möglich, r auch über eine Bedingung "kleinster Abstand zwischen P und dem laufenden Punkt X auf g" zu finden?

Nr. 3 - 6: Spiegelpunkt

3) Spiegelpunkt - Punkt / Punkt (R^2, R^3)
gesucht Spiegelpunkt zu P bezüglich A
a) A(1|3), P(2|5); b) A(1|2|3), P(5|3|1)

4) Spiegelpunkt - Punkt / Gerade (R^2)
Eine Gerade g geht durch A(1|3) und B(4|2). Welcher Punkt Q ist dann der Spiegelpunkt zu P(3|-6)?

5) Spiegelpunkt - Punkt / Gerade (R^3)
Eine Gerade g geht durch A(1|2|3) und B(3|2|1). Welcher Punkt Q ist dann der Spiegelpunkt zu P(4|2|8)?

6) Spiegelpunkt - Punkt / Ebene (R^3)
Ebene E: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 6$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Welcher Punkt Q ist dann der Spiegelpunkt zu P(-3|9|6)?

1) Annahme: es gibt zwei verschiedene Koordinaten-Darstellungen: $\mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{b_i} = \sum_i a_i' \mathbf{b_i}$
Dann muss sein $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0} \rightarrow \sum_i (a_i - a_i')\mathbf{b_i} = \mathbf{0}$
Die Definition einer Basis ist aber, dass <u>alle</u> $\mathbf{b_i}$ linear unabhängig sein <u>müssen</u>.
$\Rightarrow$ In der Linearkombination $\sum_i k_i \mathbf{b_i} = \mathbf{0}$ <u>müssen</u> <u>alle</u> Koeffizienten 0 sein. ("triviale" Lösung)
Damit gilt für <u>jedes</u> i $a_i = a_i'$ - also eine eindeutige Darstellung der Koeffizienten.

2) Der Lotfußpunkt F ist ein spezieller allgemeiner Punkt X auf g. Wie aus den Namen "Lot..." ersichtlich, steht $\overrightarrow{PF}$ senkrecht auf $\mathbf{u}$. Gleichbedeutend ist, dass $\overrightarrow{PF}$ die kleinste Länge von allen Vektoren $\overrightarrow{PX}$ hat. Der kleinste Abstand steht auch senkrecht auf der Geraden! Eine Lösung liefert nach beiden Bedingungen r und Einsetzen von r in g liefert dann den Ortsvektor $\mathbf{f}$.
Über Orthogonalität: $(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{u} = 0 \rightarrow (\mathbf{a} + r\,\mathbf{u} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{u} = 0 \rightarrow (\mathbf{a} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{u} + r\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0$
$r = \{ (\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{u} \} / |\mathbf{u}|^2$
Über eine Minimum-Bedingung: $d = |\,\overrightarrow{PX}\,|$ oder einfacher d^2 ist ein Minimum:
$d^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{a} - r\,\mathbf{u})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{a} - r\,\mathbf{u}) = (\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{a}) - 2\,r\,(\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{u} + r^2\,|\mathbf{u}|^2$
$\rightarrow \frac{d}{dr}(d^2) = 0 \rightarrow -\,2\,(\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{u} + 2\,r\,|\mathbf{u}|^2 = 0 \rightarrow r = \{ (\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{u} \} / |\mathbf{u}|^2$

3) Das Vorgehen ist in R^2 und R^3 gleich. **u** sei der Vektor von A nach P. Dann liegt der Spiegelpunkt S bei **a** - **u**. (Gleicher Abstand mit entgegengesetzter Richtung auf der Geraden durch die Punkte) Als Rechenkontrolle kann (soll) man überprüfen, dass **a** + **u** auch wieder den Punkt P liefert.

a) $\mathbf{u} = \binom{2-1}{5-3} = \binom{1}{2}$; $\mathbf{s} = \binom{1-1}{3-2} = \binom{0}{1}$; Kontrolle $\mathbf{p} = \binom{1+1}{3+2} = \binom{2}{5}$

b) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}5-1\\3-2\\1-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$; $\mathbf{s} = \begin{pmatrix}1-4\\2-1\\3+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}$; Kontrolle $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}1+4\\2+1\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$

4) Der Spiegelpunkt zu B liegt auf der Normalen auf g mit gleichem Abstand auf der entgegengesetzten Seite von g. In R^2 kann eine Normale direkt angegeben werden. Die Normale ist aus dem Richtungsvektor **u** berechenbar, **u** ist eventuell aus 2 Punkten auf g berechenbar. In einer Normalenform von g ist die Normale direkt ablesbar.

$\mathbf{u} = \binom{4-1}{2-3} = \binom{3}{-1}$; damit $\mathbf{n} = \binom{1}{3}$

Standardverfahren: Gerade g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u}$, Lotgerade g_L: $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\,\mathbf{n}$. Zur Bestimmung des Lotfußpunkts wird der laufenden Punkt x gleichgesetzt.

$\binom{1}{3} + r\binom{3}{-1} = \binom{3}{-6} + s\binom{1}{3}$

[1] $1 + 3r = 3 + s$ $\quad s = 3r - 2$ $\quad \to s = 9/2 - 2 = 5/2$

[2] $3 - r = -6 + 3s$ $\quad r = 9 - 3s = 9 - 9r + 6$ $\quad \to r = 3/2$

Lotfußpunkt: $\mathbf{f} = \binom{1+9/2}{3-3/2} = \binom{11/2}{3/2}$; Kontrolle: $\mathbf{f} = \binom{3+5/2}{-6+15/2} = \binom{11/2}{3/2}$

Von P aus wird F erreicht durch **p** + (**f** - **p**). Der Spiegelpunkt Q liegt dann um (**f** - **p**) weiter in der gleichen Richtung: **q** = **p** + (**f** - **p**) + (**f** - **p**) = 2 **f** - **p**.

$\mathbf{q} = 2 \cdot \binom{11/2}{3/2} - \binom{3}{-6} = \binom{8}{9}$

5) In R^3 muss die Idee modifiziert werden, weil eine eindeutige Normale nicht angegeben werden kann. In einem Lotfußpunktverfahren wird eine Normalenebene E zu g aufgestellt. E enthält P (als Aufpunkt), die Normale ist der Richtungsvektor **u** von g. Zur Definition von E ist damit die Normalenform sinnvoll.

$\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$; Gerade g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$

Hilfsebene E: $(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{n} = 0 \to \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} = -8$

Einsetzen der Geradengleichung als allgemeiner Punkt, liefert eine Gleichung für r:

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} = 2 - 6 + 4r + 4r = -8 \to r = -1/2$

Einsetzen von r in g liefert den Lotfußpunkt F: $\mathbf{f} = \begin{pmatrix}1-1\\2\\3+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$

Der Spiegelpunkt Q liegt bei $\mathbf{p} + 2(\mathbf{f} - \mathbf{p}) = \begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0-4\\2-2\\4-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}$

Eine mögliche Kontrolle wäre die Berechnung der Abstände P zu F und Q zu F, es folgt zweimal $4\sqrt{2}$.

6) Der Spiegelpunkt zu P liegt in Richtung der Normalen auf die Ebene E mit gleichem Abstand auf der anderen Seite. Die benötigte Normale ist entweder bekannt (Normalenform, Koordinatengleichung) oder wird aus den Richtungsvektoren berechnet. In Richtung der Normalen liegt die Lotgerade g_L, durch den Punkt P.

Standardverfahren (Lotfußpunkt):

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow g_L$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lotfußpunkt F durch Einsetzen von g_L in E: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0 \rightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$ ist in Koordinatengleichung oder in der aufgelösten Form der Normalengleichung direkt ablesbar : $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 6$

g_L in E: $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \{ -6 + 36 - 12 \} + r \{4 + 16 + 4\}$

$= 18 + 24\,r = 6 \rightarrow r = -1/2$

Einsetzen von r: $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} - (1/2) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$

Spiegelpunkt Q mit $\mathbf{q} = \mathbf{p} + 2\,(\mathbf{f} - \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4+3 \\ 7-9 \\ 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Kontrolle: zweimal gleicher Abstand P zu F und Q zu F ($\sqrt{6}$).

Abgekürztes Verfahren

Die Rechenschritte im Standardverfahren lassen sich auch zuerst allgemein formulieren. Damit entsteht eine "Endformel" für Q. Das Konzept des Lotfußpunkts kommt auch noch vor, die explizite Rechnung wird aber nicht mehr durchgeführt.

Für die Ebene gilt $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$

Weil der Lotfußpunkt in der Ebene liegt, kann er für den allgemeinen Punkt eingesetzt werden: $\mathbf{f}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$

Der Lotfußpunkt kommt aber auch auf der Lotgeraden g_L vor. Diese geht durch den Punkt P mit dem Richtungsvektor $\mathbf{n}$: $\mathbf{f} = \mathbf{p} + r\,\mathbf{n}$

Eingesetzt in die Ebenengleichung: $(\mathbf{p} + r\,\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} + r\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$

Aufgelöst: $r = \{ \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} \} / \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}$

Der Lotfußpunkt wird ausgehend von **p** durch + **r n** erreicht, dann muss der Spiegelpunkt ausgehend von **p** durch + 2 **r n** erreicht werden:

$\Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{p} + 2\,\{ \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} \} / \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 6$; $\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -6 + 36 - 12 = 18$

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 + 16 + 4 = 24$

$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot (6 - 18) / 24 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$