Übungen 4

Gerade, Ebene - Kurze Aufgaben

1) Gesucht ist Normalenform einer Ebene, die den Punkt P(1|2|3) enthält und auf der x-Achse senkrecht steht.

2) Gegeben ist die Ebene E: $x\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = 4$ und die Gerade g: $\mathbf{x} = \cdot\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$.

   Gesucht ist der Winkel zwischen E und g.

3) Eine Ebene enthält die Punkt A(1|2|3), B(-4|3|2) und C(4|-2|1). Gesucht sind zwei mögliche Koordinatengleichungen der Ebene -mit <u>gleichem</u> Aufpunkt.

4) Gegebene Punkte A(1|7) und B(-3|5). Gesucht die Gleichung der Geraden, die durch den Mittelpunkt zwischen A und B geht und senkrecht auf der Verbindungslinie $\overrightarrow{AB}$ steht.

Ebene: Spurpunkte, Spurgerade, Achsenabschnittsform

5) Gesucht sind die Schnittpunkte der Ebene E: $x + 2y + 3z = 4$ mit den Koordinatenachsen. Angabe: Spurpunkte und zusätzlich Spurgeraden, Achsenabschnittsform

Gerade, Ebene

6) Gegeben sind die beiden Geraden g_1: $\mathbf{x} = \cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$ und g_2: $\mathbf{x} = \cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\9\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$.

   Gesucht ist der Abstand zwischen beiden Geraden.

7) Gegeben sind jeweils 2 Ebenen, gesucht ist jeweils der Abstand.

   a) E_1: $\mathbf{x} = \cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-5\\6\\-7\end{pmatrix}$; E_2: $\mathbf{x} = \cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} + q\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$

   b) E_1: wie bei a) E_2: $\mathbf{x} = \cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + q\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$

   b) E_1: wie bei a) E_2: $\mathbf{x} = \cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix} + q\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\-5\end{pmatrix}$

8) Gegeben sind 2 parallele Ebenen. E_1 enthält die Punkt A(1|2|3), B(2|4|4) und C(-1,3,2). In Ebene E_2 liegt eine Gerade g. Deren Aufpunkt liegt in Richtung der Normalen auf E_1 mit einem Abstand $2\cdot\sqrt{35}$ zum Punkt A von E_1. Ein zweiter Punkt der Geraden liegt mit demselben Abstand auf einer Normalen zum Punkt B.
   Gesucht ist die Gleichung der Geraden g (aller Geraden, falls es mehrere gibt).

1) Vektor in Richtung der x-Achse: $\cdot\begin{pmatrix}c\\0\\0\end{pmatrix}$, c - irgendeine (reelle) Konstante

Man kann auch fordern, dass als Vektor für die Achse der Einheitsvektor benutzt werden soll. Dann ist c = 1.

E: $(x - a)\cdot n = 0 \rightarrow \left[x - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}c\\0\\0\end{pmatrix} = 0$

2) Am sinnvollsten ist die Anwendung einer vorhandenen Formel! (siehe L12)

$\sin(\varphi) = |\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}| / \{ |\mathbf{n}|\ |\mathbf{u}| \}$; **n** Normale auf die Ebene, **u** Richtungsvektor der Geraden

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = \cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} = -8$; $|\mathbf{n}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$; 55; $|\mathbf{u}| = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$

$\sin(\varphi) = 8 / \sqrt{406} \approx 0{,}397 \rightarrow \varphi \approx 23{,}4°$

3) Punkte: A(1|2|3), B(-4|3|2), C(4|-2|1)

Richtungsvektoren: $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}-5\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}$

Normale: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\-5 & 1 & -1\\3 & -4 & -2\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}1 & -1\\-4 & -2\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}-5 & -1\\3 & -2\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}-5 & 1\\3 & -4\end{vmatrix} =$

$= -6\,\mathbf{i} - 13\,\mathbf{j} + 17\,\mathbf{k} = \begin{pmatrix}-6\\-13\\17\end{pmatrix}$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\-13\\17\end{pmatrix} = -6 - 26 + 51 = 19$

Für 2. Form gleiches **a**, anderes **n**, z.B. Doppeltes. Dann auch **a·n** doppelt so groß.

Koordinatengleichung: $x\,n_x + y\,n_y + z\,n_z = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$

→ E: -6 x - 13 y + 17 z = 19

→ E: -12 x - 26 y + 34 z = 38

4) Punkte: A(1|7), B(-3|5).

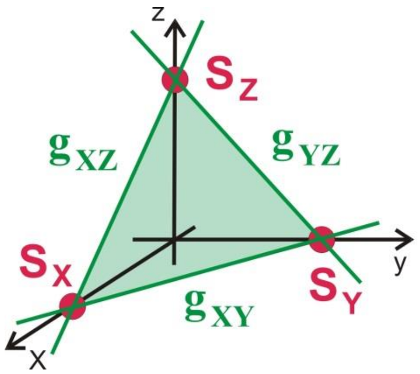
→ Mittelpunkt M(-1|6); Richtungsvektor $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$; Normale $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

Gerade g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

5) Spurpunkte und Spurgeraden

Spurpunkte
Schnittpunkte der Ebene mit den Achsen

Spurgeraden
Verbindungsgeraden der Spurpunkte
damit auch
Schnittgeraden der Ebene mit den Koordinatenebenen



Am **schnellsten** (und sinnvollsten) ist die **Rechnung** in der **Koordinatenform** der Ebene.
E: x + 2y + 3z = 4.
Ein Punkt auf der x-Achse hat die y- und z-Koordinate 0, also P(x|0|0). Eingesetzt in die Ebenengleichung folgt x = 4. Schnittpunkt mit der x-Achse ist $S_X(4|0|0)$.

Analog mit 2y = 4 $S_Y(0|2|0)$ und mit 3z = 4 $S_Z(0|0|4/3)$.
Die Geraden durch jeweils 2 Spurpunkte: Verbindet man so S_X und S_Y liegt die Gerade in der X-Y-Ebene. Die Spurgerade g_{XY} ist damit auch die Schnittgerade der Ebene E mit der X-Y-Koordinatenebene.

g_{XY}: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0-4\\2-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}$

In gleicher Weise: g_{XZ}: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\0\\4/3\end{pmatrix}$ und g_{YZ}: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-2\\4/3\end{pmatrix}$

Man kann auch Ax + By + Cz = D durch D dividieren. Dann folgt
E: x / (D/A) + y / (D/B) + z / (D/C) = 1.
Dann ist der Nenner jeweils gleich dem Spurpunkt: D/A ≡ S_X, D/B ≡ S_Y, D/C ≡ S_Z.
Diese Darstellung der Ebene nennt man die Achsenabschnittsform.
E: x / 4 + y / 2 + z / (4/3) = 1

- ***Ergänzung***: NICHT ein anderer Rechenweg - **NUR zur Vertiefung!**

  Die Spurgerade ist die "Schnittgerade der Ebene E mit einer Koordinatenebene".
  → Die "direkte Umsetzung" liefert auch die Spurgeraden.

  E: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0 \rightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$; $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 4$

  X-Y-Ebene: Normale ist die z-Achse, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}$; k (reelle) Konstante, $k \neq 0$

  Als Aufpunkt am Einfachsten der Koordinatenursprung, O(0|0|0). Damit $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 0$.
  Gleichungssystem: [1] x + 2 y + 3 z = 4
  [2] $0\cdot x + 0\cdot y + k\,z = 0$

  Aus [2], wegen $k \neq 0$, z = 0.
  In [1] als freier Parameter y = t → x + 2t = 4 → x = 4 - 2t

  Aufgespalten und geordnet: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ und mit der Wahl t = 2: $\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}$

  Es folgt dieselbe Spurgerade, wie direkt und einfacher aus den zwei Spurpunkten.

- ***Ergänzung***: nicht vorgeschlagener **Rechenweg für E in der Parameterform**

  Eine mögliche Parameterform ist E: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}8\\2\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}12\\0\\-4\end{pmatrix}$

  Gleichsetzen eines Punkts P(x|0|0) und x liefert ein Lineares Gleichungssystem (analog für y, z)

  P(x|0|0): [1] x = -3 + 8s + 12t; [2] y = 0 = 2 + 2s; [3] z = 0 = 1 - 4s - 4t
  [2]: s = -1; in [3]: 4t = 1 + 4 = 5 → t = 5/4; in [1]: x = -3 -8 + 15 = 4
  → $S_X(4|0|0)$

  P(0|y|0): [1] x = 0 = -3 + 8s + 12t; [2] y = 2 + 2s; [3] z = 0 = 1 - 4s - 4t
  [1] + 2·[3]: -1 + 4t = 0 → t = 1/4; in [3]: 4s = 1 - 4t = 0; in [2]: y = 2 + 0
  → $S_Y(0|2|0)$

P(0|0|z): [1] x = 0 = -3 + 8s + 12t; [2] y = 0 = 2 + 2s; [3] z = 1 - 4s - 4t
[2]: s = -1; in [1]: 12t = 3 - 8s = 11 → t = 11/12; in [3]: z = 1 + 4 - 11/3 = 4/3
→ $S_Z(0|0|4/3)$

6) g_1: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\,\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$; g_2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}3\\-2\\9\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$

Bevor man sofort losrechnet (Lineares Gleichungssystem) sollte man auf die Sonderfälle prüfen!

a) Es mit einem Blick erkennbar, dass $\mathbf{u}(g_1) = -2\,\mathbf{u}(g_2)$. Die Geraden sind parallel.

b) $\mathbf{a}(g_1) + \mathbf{u}(g_1) = \mathbf{a}(g_1)$ → ein Punkt auf g_1 liegt auch auf g_2 → identische Geraden

Dafür: Abstand = 0

7) Eine Möglichkeit ist, jeweils mit $\mathbf{x}(E_1) = \mathbf{x}(E_2)$ ein Lineares Gleichungssystem zu lösen. Schneller ist, in der Normalenform zu arbeiten.

E_1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\6\\-7\end{pmatrix}$

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\4 & -5 & 6\\-5 & 6 & -7\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}-5 & 6\\6 & -7\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}4 & 6\\-5 & -7\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}4 & -5\\-5 & 6\end{vmatrix} =$$

$$= -\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

a) E_2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\3 & -4 & 5\\2 & -3 & 4\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}-4 & 5\\-3 & 4\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}3 & 5\\2 & 4\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}3 & -4\\2 & -3\end{vmatrix} =$$

$$= -\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

b) E_2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ enthält nur eine Vertauschung der Zeilen, $\mathbf{n}$ ist daher gleich dem $\mathbf{n}$ von a).

c) E_2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}3\\-4\\-5\end{pmatrix}$

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\2 & -3 & -4\\3 & -4 & -5\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}-3 & -4\\-4 & -5\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}2 & -4\\3 & -5\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}2 & -3\\3 & -4\end{vmatrix} =$$

$$= -\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Parallele Ebenen E_1 und E_2 bei a) und b).

⇒ Nicht parallel bei c) → E_1 und E_2 schneiden sich, also Abstand = 0

Bei a) und b) muss nun untersucht werden, ob die Ebenen identisch sind.
(Liegt ein Punkt der einen Ebene auch in der anderen?)

→ Einsetzen eines Punkts von E_2 - z.B. des Aufpunkts - in E_1
- am einfachsten in der Normalenform.

E_1: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0 \rightarrow (\mathbf{b} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$? (Für einfachere Rechnung kollinearen Vektor $-\mathbf{n}$ benutzt.)

a) $\rightarrow \left[\begin{pmatrix}-3\\6\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 0$

b) $\rightarrow \left[\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\-6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = -2 \neq 0$

$\Rightarrow$ a) identische Ebenen, also Abstand =0

b) parallele Ebenen, es gibt einen Abstand. Berechnung "Punkt/Ebene"

$d = (\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_0}$ - als p am einfachsten den Aufpunkt von E_2

$|\mathbf{n}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$; schon berechnet $(\mathbf{b} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = -2$

$\Rightarrow$ b) Abstand $|d| = 2/\sqrt{6}$

8) E_1: Punkte A(1|2|3), B(2|4|4) und C(-1,3,2).

E_1: Aufpunkt A, Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$

E_1: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{v} + s\,\mathbf{w} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Normale: $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\-2 & -1\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{vmatrix} =$

$= -3\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\,\mathbf{k} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\5\end{pmatrix}$

E_2 hat dieselbe Normale. Die Gerade g in dieser Ebene sei g: $\mathbf{x} = \mathbf{f} + t\,\mathbf{u}$

Der Aufpunkt F liegt auch auf der Geraden g_N: $\mathbf{f} = \mathbf{a} + q\,\mathbf{n}$.

Als "Abstandsproblem" haben wir (Hesse-Normalenform):

Punkt A zur Ebene E_2. E_2 hat den Aufpunkt $\mathbf{a} + q\,\mathbf{n}$ und die Normale $\mathbf{n}$.

$d = [\mathbf{a} - (\mathbf{a} + q\,\mathbf{n})]\cdot\mathbf{n_0} = -q\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} / |\mathbf{n}| = \pm 2\cdot\sqrt{35}$;

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 9 + 1 + 25 = 35$; $|\mathbf{n}| = \sqrt{35}$

$\rightarrow q = \pm 2 \rightarrow$ Aufpunkt F: $\mathbf{f} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \pm 2\begin{pmatrix}-3\\-1\\5\end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{f_1} = \begin{pmatrix}-5\\0\\13\end{pmatrix}$; $\mathbf{f_2} = \begin{pmatrix}7\\4\\-7\end{pmatrix}$

Den 2. Punkt H der Geraden können wir analog bestimmen - wenn wir das wollen (s.u.!)

$\mathbf{h} = \mathbf{b} + q\,\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{h} = \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} \pm 2\begin{pmatrix}-3\\-1\\5\end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{h_1} = \begin{pmatrix}-4\\2\\14\end{pmatrix}$; $\mathbf{h_2} = \begin{pmatrix}8\\6\\-6\end{pmatrix}$

Alternativ liegt H bei $\mathbf{f} + \mathbf{v}$, weil B bei $\mathbf{a} + \mathbf{v}$ liegt.

$\mathbf{h_1} = \begin{pmatrix}-5\\0\\13\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\14\end{pmatrix}$; $\mathbf{h_2} = \begin{pmatrix}7\\4\\-7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\6\\-6\end{pmatrix}$

Und schließlich hätten wir uns die Berechnung des 2. Punkts H gänzlich sparen können!
Gefragt ist nur die Gerade g. Deren Richtungsvektor $\mathbf{u}$ ist gleich $\mathbf{h} - \mathbf{f}$, also $\mathbf{v}$!
Relativ zur Ebene E_1 gibt es 2 parallele Ebenen mit dem gleichen Abstand, also auch 2 darin liegende Geraden g.

g_1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-5\\0\\13\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; g_2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}7\\4\\-7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$