Vektoren - Einführung

Grundlegendes

> Verwendete Nomenklatur: Handschriftlich ist es kein Problem, einen Vektor stets durch $\vec{a}$ zu kennzeichnen. In der Textverarbeitung ist die andere Variante, Fettdruck, eine wesentliche Erleichterung!

Hinweis: Zu (fast) jedem Sachverhalt ist neben der Erklärung ein komplett durchgerechnetes Beispiel vorhanden. Wenn sinnvoll, sind auch mögliche falsche Ideen genannt - und deren Erkennung und Vermeidung wird gezeigt.

Rein formal ist ein **Vektor ein mathematisches Objekt**, für das bestimmte Gesetze gelten. Dieser Standpunkt ist bei weitergehenden Anwendungen sinnvoll. Üblicherweise versteht man unter einem Vektor eine Angabe einer gerichteten Strecke. Das Objekt Vektor hat damit nicht nur eine Länge, sondern auch eine Orientierung bezüglich eines Koordinatensystems. Ebenso wird üblicherweise das (rechtwinklige) kartesische Koordinatensystem zugrundegelegt.

Eine besondere Festlegung hat sich als zweckmäßig erwiesen. Ein **Vektor** stellt nicht nur einen bestimmten Pfeil dar, sondern eine **Pfeilklasse**. Alle Pfeile mit gleicher Länge und Orientierung sind Repräsentanten desselben Vektors. Man kann sich das so vorstellen: Ein Vektor gibt ausgehend von einem Anfangspunkt A an, wo sich der Punkt B befindet. Der Anfangspunkt A ist aber frei wählbar. Nur B liegt dann immer in einem bestimmten Abstand und einer bestimmten Orientierung relativ zu A.

💣 Bei strenger Beachtung dieses Prinzips kann ein Vektor nicht verschoben werden. Man erzeugt dann einen anderen Repräsentanten, der relativ zu einem anderen verschoben ist. Üblicherweise wird man diese präzise Formulierung vernachlässigen und "verschiebt Vektoren".

Manchmal ist es sinnvoll, sich auf einen bestimmten Anfangspunkt zu beziehen. (Teilweise wird das als "gebundener" Vektor bezeichnet.) Meistens ist dies der Ursprung O des verwendeten Koordinatensystems. Wir nennen die Vektoren $\overrightarrow{OB}$ dann **Ortsvektoren**.

Mit Vektoren lassen sich bestimmte Aufgabe der Geometrie leichter lösen, z.B. die Beschreibung von Geraden oder Ebenen. Als zugrundeliegender Raum sind dabei zwei oder drei Dimensionen zugelassen, also R^2 oder R^3. Dass Vektoren auch in der Physik sinnvoll sind, ergibt sich sofort aus einem Beispiel: Zieht man mit einer Schnur an einem Stein, hängt die erreichte Bewegung nicht nur von der Stärke des Ziehens ("Kraft") sondern auch von der Richtung ab, in die man zieht. Die physikalische Größe Kraft enthält damit einen Betrag und eine Orientierung. Dabei kann es auch nötig sein, einen "gebundenen" Vektor zu verwenden. Es ist wichtig, wo eine Kraft angreift, nicht nur in welche Richtung und mit welchem Betrag.

Eine Größe, die nur einen Betrag hat, aber keine Orientierung, nennt man "**Skalar**". (In der Physik ist die Masse ein Beispiel dafür.) Damit ist auch klar, dass man einem Vektor einen Skalar "Betrag" zuordnen kann. Eine Strecke hat eine Länge und eine Orientierung.

Komponenten / Koordinaten

Zur Durchführung von Rechenoperationen wird der Vektor mit **Komponenten** bzw. **Koordinaten** dargestellt. Für einen Vektor **a** sind das allgemein Angaben a_1, a_2, ... Für geometrische Anwendungen wird oft a_x, a_y, a_z benutzt. (Zwei Komponenten für R^2 und drei Komponenten für R^3.)

Schreibtechnisch ist für einen Vektor eine Zeile möglich **a** = (a_x; a_y; a_z) oder (a_x | a_y | a_z).

Üblich ist aber eine Angabe als Spalte: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$.

Anmerkung: Mit Handschrift ist das kein Problem, mit Textverarbeitung eher umständlich. Eine Antwort wäre, "es ist eben so üblich". Eine tiefergehende Antwort wäre, dass damit in Verknüpfung mit Matrizen die Darstellung eindeutig wird. In einer Matrizen-Darstellung lässt sich dann aber auch $\mathbf{a}^T = (a_x\ a_y\ a_z)$ schreiben (transponierte Matrix)!

Zu Zahlen gelangt man, indem man für den Vektor **a** zu einer Strecke $\overrightarrow{AE}$ den Anfangspunkt A in den Koordinatenursprung O(0|0|0) legt. Der Endpunkt des Ortsvektors $\overrightarrow{AE}$ und die Koordinaten des Punkts $E(a_x \mid a_y \mid a_z)$ sind dann gleich. Es ist üblich, bei "normalen" geometrischen Anwendungen sich auf das gewohnte kartesische, rechtwinklige Koordinatensystem zu beziehen. Dann können wir diese Zahlen a_x, ... auch als **Koordinaten** des Vektors bezeichnen!

💣 Eine genauere Unterscheidung ist erst sinnvoll, wenn der Begriff der Basis eingehender besprochen wird! Wir verwenden die sog. "Standardbasis".

Die zu beachtende Besonderheit ist, dass ein allgemeiner Vektor (Pfeilklasse) als Koordinaten die Zahlen enthält, die erhalten werden, wenn man den Vektor als Ortsvektor betrachtet, also im Punkt O beginnen lässt.

Addition, Subtraktion, Multiplikation (Division)

Bei der **Addition** wird ein Vektor am Ende des anderen angehängt. Bei der **Subtraktion** wird der Vektor mit umgekehrter Orientierung angehängt. Das erscheint sinnvoll und dann sind auch Rechenoperationen leicht möglich. Die Operationen Addition und Subtraktion sind so definiert, wie man es eigentlich auch erwartet. Die Komponenten, bzw. Koordinaten werden auch addiert oder subtrahiert.

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & \pm & b_x \\ a_y & \pm & b_y \\ a_z & \pm & b_z \end{pmatrix}$$

Man kann durch eine Skizze (vereinfacht in R^2) überprüfen, dass das auch Sinn macht.

a + **b** bedeutet dann, dass **b** am Endpunkt von **a** beginnt. **b** wird also am Ende von **a** dazu gezeichnet.

- **a** bedeutet, dass sich die Orientierung umkehrt, aber die Länge gleich bleibt. Das macht auch Sinn. Man erwartet **a** + (- **a**) = **0**. Bei Zahlen gilt ja auch x + (- x) = 0. (**-a** ist der "Gegenvektor" zu **a**.)

Damit ist auch die grafische Darstellung **a** - **b** klar: **b** wird ausgehend vom Endpunkt von **a** gezeichnet, aber mit umgekehrter Orientierung.

Von Interesse ist auch eine "**geschlossene Vektorkette**". Wenn Pfeile so aneinandergefügt werden, dass wieder der Ausgangspunkt erreicht wird, ist die Summe der dazugehörenden Vektoren gleich dem Nullvektor. Wichtig ist dabei eine korrekte Skizze mit den Orientierungen. (Eventuell kommt in der Kette ein "Gegenvektor" vor.)

Auch schnell einzusehen ist die **Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar**, also "Vektor · Zahl". Wenn wir einen Pfeil dreimal vergrößern, wird er dreimal länger. Aber die Richtung zu ändern, wäre kaum sinnvoll. Im Raum werden sich damit wie beim Aufblasen eines Luftballons für einen auf der Hülle gezeichneten Punkt alle drei Koordinaten gleichsinnig ändern. Nur Änderung der Größe aber Beibehalten der Orientierung bedeutet damit in Komponenten:

$s \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} s\,a_x \\ s\,a_y \\ s\,a_z \end{pmatrix}$

Die Länge des Vektors, d.h. dessen Betrag, bestimmen wir über die Koordinaten des Eckpunkts E von $\mathbf{a} = \overrightarrow{OE}$, also der dazugehörende Ortsvektor benutzt wird. Nach Pythagoras gilt

$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Im Text ist üblich, Vektoren fett zu schreiben und den Betrag davon normal,
also zum Vektor **a** ist der Betrag $|\mathbf{a}| = a$.

Problematisch sind die Operationen **Multiplikation** und **Division**. Wir können sicher die Beträge multiplizieren oder dividieren. Für die Orientierung ergibt sich aber keine sinnvolle Möglichkeit. 30 Grad relativ zur x-Achse "mal" 20 Grad relativ zur x-Achse ergibt 50 Grad relativ zur x-Achse? Das ist auch logisch eine Addition und keine Multiplikation von Orientierungen!

Anmerkung: Teilweise werden komplexe Zahlen auch als Vektoren interpretiert, weil sie wie diese in einem x, y - Koordinatensystem grafisch dargestellt werden können. Das ist nicht nur irreführend, sondern auch falsch! Komplexe Zahlen können miteinander multipliziert und durcheinander dividiert werden, Vektoren aber nicht!

Die **Division** wird für Vektoren nicht definiert.

Für die Multiplikation hat die Anwendung in der Physik Pate gestanden. Zwei Definitionen haben sich als zweckdienlich erwiesen. Dass diese Definitionen in weiteren allgemeinen Anwendungen der Vektorrechnung sinnvoll sind, ist selbstverständlich erfreulich.

Das **Skalarprodukt a·b** liefert eine Zahl (einen Skalar). Allgemein ist es definiert als Produkt der beiden Beträge "mal" Cosinus des Winkels zwischen beiden Vektoren.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\varphi)$, φ = Winkel zwischen **a** und **b**.

Ein wichtiger Sonderfall ist $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Wenn beide Beträge, $|\mathbf{a}|$ und $|\mathbf{b}|$, nicht 0 sind, bedeutet das, dass die Vektoren senkrecht aufeinander stehen (Fachsprache: orthogonale Vektoren).
Auch der Betrag eines Vektors ist damit darstellbar: $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$

In Komponenten bzw. Koordinaten gilt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.

Anmerkung - anfangs vielleicht verwirrend, aber wichtig:
Diese einfache Formel gilt nur im Fall des (üblichen) kartesischen Koordinatensystems! Werden Vektorkomponenten in einer anderen als der "Standardbasis" definiert, kann die Formel länger sein!

> Zur Nomenklatur: Das Skalarprodukt wird stets mit einem Punkt gekennzeichnet

Anmerkung - zur begrifflichen Klärung notwendig:
Das Skalarprodukt ist prinzipiell etwas Anderes als die "normale" Multiplikation von Zahlen oder Symbolen! Trotzdem ist es üblich, für beide Operationen einen Punkt zu benutzen. Bei der "normalen" Multiplikation wird der Punkt weggelassen, wenn Eindeutigkeit besteht. "7 z" bedeutet ohne Verwechslungsgefahr "7 mal z". Beim Skalarprodukt ist diese Abkürzung nicht üblich!

In R^3, also in 3 Dimensionen, ist das **vektorielle Produkt** (oder **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt**) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ sinnvoll (gesprochen: "a Kreuz b"). Das Ergebnis ist wieder ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene durch **a** und **b** steht.

Der Betrag ist $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\varphi)$, φ = Winkel zwischen **a** und **b**

Dieser Betrag ist auch gleich der Fläche eines Parallelogramms mit den beiden Seiten **a** und **b**. Weil eine Senkrechte auf eine Ebene auf zwei Seiten liegen kann, wird definiert, das **a**, **b** und **a x b** ein Rechtssystem bilden.

In Komponenten bzw. Koordinaten:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Auch das gilt wieder nur in der Standardbasis!
Anstelle dieser Formel verwendet man üblicherweise eine einfachere Berechnungsvorschrift mit Determinanten!

Anmerkung: Das Vektorprodukt in nur in R^3 definiert. Ein dritter Vektor der senkrecht auf einer Ebene durch zwei Vektoren steht, ist in R^2 unmöglich.

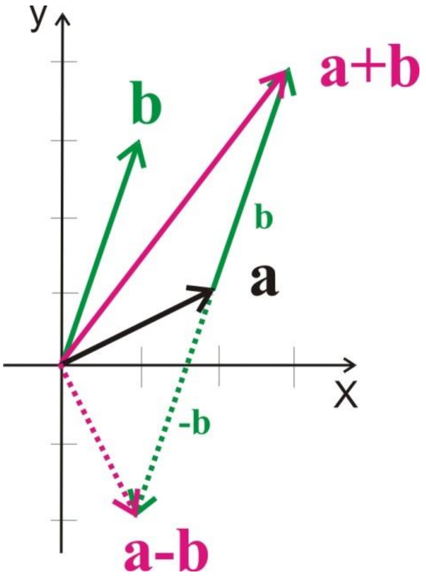
Die **nachfolgenden Beispiele** sind (bis auf das Kreuzprodukt) **in $\mathbf{R^2}$** formuliert, um die Skizzen zu vereinfachen.

Beispiel zu Addition und Subtraktion

$\mathbf{a} = \binom{2}{1}$; $\mathbf{b} = \binom{1}{3}$

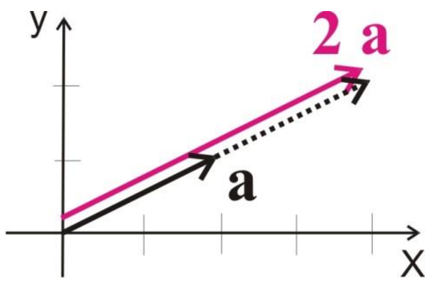
Bei der Bildung von **a** + **b** wird **b** am Ende von **a** angefügt. Grafisch entsteht der Vektor $\binom{3}{4}$.
b darf dabei frei verschoben werden, weil dies weder die Länge noch die Orientierung ändert.
Rechnerisch gilt ebenso $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \binom{2+1}{1+3}$.

Bei **-b** wird die Richtung umgekehrt, **-b** wird wieder am Ende von **a** angefügt. Es entsteht $\binom{1}{-2}$.
Rechnerisch ist $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \binom{2-1=1}{1-3=-2}$.



Beispiel zu Multiplikation mit einem Skalar

$\mathbf{a} = \binom{2}{1}$; gebildet wird $2 \cdot \mathbf{a}$.
Grafisch wird dabei die Länge verdoppelt, die Orientierung aber beibehalten. Es folgt $\binom{4}{2}$.
Rechnerisch werden alle Komponenten mit dem Skalar multipliziert: $\binom{2 \cdot 2 = 4}{2 \cdot 1 = 2}$.



Beispiel zu Skalarprodukt

"Überprüfung", ob der Winkel richtig berechnet wurde:

$\mathbf{a} = \binom{2}{1}$; $\mathbf{b} = \binom{1}{3} \rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5$

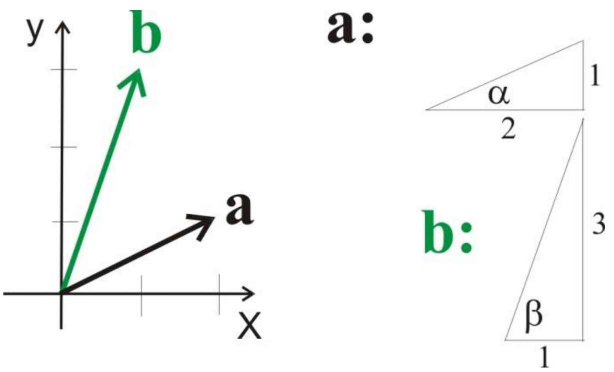
$|\mathbf{a}| = \sqrt{5}$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{10}$;

$\cos(\varphi) = 5 / (\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}) \approx 0{,}7071$; $\varphi = 45°$

α und β seien die Winkel von **a** und **b** mit der x-Koordinatenachse. φ sei der Winkel zwischen **a** und **b**.

für **a** gilt: $\tan(\alpha) = 1/2 = 0{,}5$; $\alpha \approx 26{,}57°$
für **b** gilt: $\tan(\beta) = 3/1 = 3$; $\beta \approx 71{,}57°$

Winkel zwischen **a** und **b**:
$\varphi = \beta - \alpha = 71{,}57 - 26{,}57 = 45°$



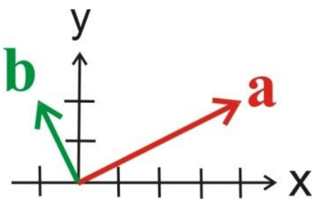
Der Winkel zwischen den Vektoren ist korrekt die Differenz der beiden Winkel der Vektoren zur x-Achse. (Rechts: Hilfsskizze zur Berechnung des Tangens)

orthogonale Vektoren:

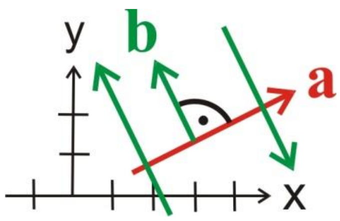
$\mathbf{a} = \binom{4}{2}$; $\mathbf{b} = \binom{-1}{2}$. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0$

Ohne Berechnung von $|\mathbf{a}|$ und $|\mathbf{b}|$: $\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 90°$

a und **b** sind **orthogonal**



a und **b** als Ortsvektoren



auch orthogonal

a und **b** sind orthogonal.

Diese Eigenschaft bleibt erhalten, wenn der "Vektor verschoben wird". (Genauer: ein anderer, verschobener Repräsentant betrachtet wird.) Diese Eigenschaft bleibt auch erhalten, wenn andere zu **b** kollineare Vektoren betrachtet werden. (kollinear: verschiedener Länge und/oder umgedrehte Richtung)

Bei "orthogonal" wird nur die gegenseitige Orientierung betrachtet.

Allgemein kann so ein möglicher orthogonaler Vektor erzeugt werden:

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \Rightarrow \perp \mathbf{a}: \pm \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \Rightarrow \perp \mathbf{a}: \pm \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 \\ -a_z \\ a_y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -a_z \\ 0 \\ a_x \end{pmatrix}$

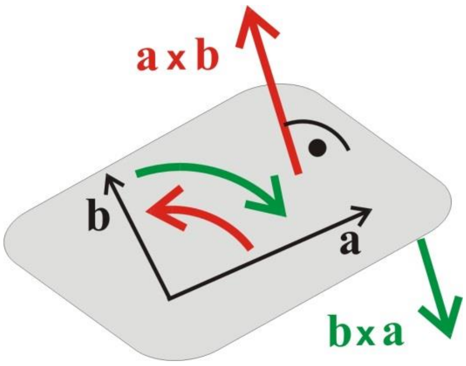
Beispiel zu Vektorprodukt

(Die Berechnung mit den "Determinanten-Formeln" steht hier. Deren Herleitung bzw. Begründung bei "Determinanten" und "Basis".)

a x **b** liegt ⊥ auf der Ebene durch **a** und **b**.
a, **b** und **a** x **b** bilden ein Rechtssystem.

b x **a** ist antiparallel zu **a** x **b**.
Es gilt **b** x **a** = - **a** x **b**

(Das Vektorprodukt ist "antikommutativ".)



Rechtsystem - Rechte Hand Regel
a x **b**: Gehe mit den Fingern (der rechten Hand) von **a** in Richtung **b**, der Daumen zeigt dann in Richtung **a** x **b**.
(Geht man von **b** in Richtung **a**, zeigt der Daumen in die Gegenrichtung.)

a = $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; **b** = $\begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix}$.

(Unübliche) **Verwendung der Formel**:

$\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_yb_z - a_zb_y\\a_zb_x - a_xb_z\\a_xb_y - a_yb_x\end{pmatrix}$: **a** x **b** = $\begin{pmatrix}2\cdot(-5) - 3\cdot 4 = -22\\3\cdot(-3) - 1\cdot(-5) = -4\\1\cdot 4 - 2\cdot(-3) = 10\end{pmatrix}$

|**a** x **b**| = $\sqrt{484 + 16 + 100} = \sqrt{600} = 10\,\sqrt{6}$ ≈ 24,4949

Vergleich mit der Definition |**a** x **b**| = |**a**| · |**b**| · sin(φ):

|**a**| = $\sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$; |**b**| = $\sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}$.

a·**b** = -3 + 8 - 15 = -10

cos(φ) = -10 / $\sqrt{14 \cdot 50}$ ≈ -0,37796; φ ≈ 112,21°; sin(φ) ≈ 0,92562

|**a** x **b**| = $\sqrt{14 \cdot 50}$ ·sin(φ) ≈ 24,4949

Ohne Rundung mit sin(φ) = $\sqrt{1 - \cos^2(\varphi)}$:

cos(φ) = -10 / $\sqrt{700}$; |**a** x **b**| = $\sqrt{700} \cdot \sqrt{1 - \frac{100}{700}} = \sqrt{\frac{700 \cdot 600}{700}} = 10\,\sqrt{6}$

Determinanten-Formel "Entwicklung":

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -22\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 10\,\mathbf{k} \rightarrow \begin{pmatrix} -22 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Sarrus-Schema:

i	**j**	**k**	**i**	**j**	**i**: -10 - 12 = -22
1	2	3	1	2	**j**: -9 - (-5) = -4
-3	4	-5	-3	4	**k**: 4 - (-6) = 10 (gleicher Vektor wie vorher)

Umkehrung Vorzeichen bei Vertauschung: **b** x **a** = - **a** x **b**

Anstelle einer Rechnung geht das ganz schnell mit der Determinanten-Entwicklung! Wenn 2 Zeilen (miteinander) vertauscht werden, ändert sich das Vorzeichen der Determinante. Genau das passiert beim Einsetzen von {**b**, **a**} anstelle von {**a**, **b**}.

Eine Rechnung für **b** x **a** ist:

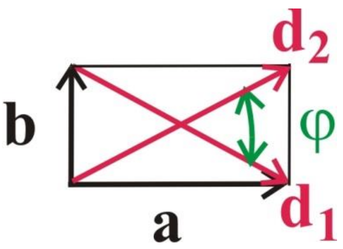
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 22\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 10\,\mathbf{k} \rightarrow \begin{pmatrix} 22 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

also das Negative des Vektors **a** x **b**.

Übungen

1) Gegeben sind 2 gleich lange Vektoren **a** und **b**. Wie liegen dann immer die Vektoren **a + b** und **a - b** relativ zueinander? (Hinweis: Skalarprodukt!)

2) Wie groß ist der Winkel φ zwischen den beiden Diagonalen d_1 und d_2?
   a) In einem Quadrat (Seitenlänge beliebig)
   b) In einem Rechteck, a doppelt so lang wie b.
   Hinweis:
   a) Ergebnis von Nr. 1) verwenden.
   b) Auch mit Komponenten in R^2 lösen.
   Sinnvoll: Vektoren laut Skizze festlegen



3) Gegeben sind 3 Punkte: $P_1(1|2|3)$, $P_2(2|0|5)$, $P_3(3|1|1)$
   Diese 3 Punkte definieren ein Dreieck.
   a) Berechne die Fläche mit der Heron-Formel (umständlichste "klassische" Variante)
      Falls Formel nicht zu finden: Sie steht in der Lösung.
   b) Wie kann die Fläche (deutlich) schneller berechnet werden?
   c) Berechne die Winkel im Dreieck.
   d) Wie kann mit dem Ergebnis von c) die Fläche ganz schnell berechnet werden?

1) (**a** + **b**)·(**a** - **b**) = **a**·**a** + **b**·**a** - **a**·**b** - **b**·**b**
   Das Skalarprodukt ist kommutativ, **a**·**b** = **b**·**a**.
   a·**a** ist das Quadrat des Betrags (Länge), ebenso **b**·**b**.
   Weil beide Vektoren gleich lang sind, gilt **a**·**a** = **b**·**b**.
   Insgesamt ist das Skalarprodukt damit 0
   ⇒ Die Vektoren stehen ⊥ aufeinander (sind orthogonal).

2a) *Quadrat* Es liegen zwei geschlossene Vektorketten vor

1. $\mathbf{b} + \mathbf{d_1} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{d_1} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$
2. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + (-\mathbf{d_2}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{d_2} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

In Nr. 1 gezeigt: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ und $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ liegen $\perp$ aufeinander, wenn $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$. $\Rightarrow \varphi = 90°$

2b *Rechteck* Wie bei a) $\mathbf{d_1} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ und $\mathbf{d_2} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

φ über das Skalarprodukt: $\mathbf{d_1}\cdot\mathbf{d_2} = |\mathbf{d_1}|\,|\mathbf{d_2}| \cos(\varphi)$

$\mathbf{d_1}\cdot\mathbf{d_2} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$

Ohne weitere Rechnung sehen wir aus der Skizze: $\mathbf{d_1}$ und $\mathbf{d_2}$ sind gleich lang

Ebenso (rechtwinkliges Dreieck): $a^2 + b^2 = d_1^2$

Weil (laut Aufgabenstellung) a = 2 b: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2 = 4\,b^2$; $\mathbf{d_1}\cdot\mathbf{d_2} = 3\,b^2$; $d_1^2 = d_2^2 = 5\,b^2$

Damit: $\cos(\varphi) = 3\,b^2 / 5\,b^2 = 3/5$. $\varphi = 53{,}13°$

Rechnerisch (wenn man konsequent die Vektorrechnung verwenden will):

$\mathbf{d_1}\cdot\mathbf{d_2} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = a^2 - b^2 = 4\,b^2 - b^2 = 3\,b^2$

$|\mathbf{d_1}|^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$, weil $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

$|\mathbf{d_1}|^2 = a^2 + b^2 = 4\,b^2 + b^2 = 5\,b^2$; $|\mathbf{d_1}| = \sqrt{5}\,b$

$|\mathbf{d_2}|^2 = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$, weil $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

$|\mathbf{d_2}| = \sqrt{5}\,b$

$\cos(\varphi) = 3\,b^2 / \{ \sqrt{5}\,b\,\sqrt{5}\,b \} = 3/5$

Lösung in Komponenten-Darstellung:

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_y \end{pmatrix}$; $\mathbf{d_1} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ -b_y \end{pmatrix}$; $\mathbf{d_2} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ b_y \end{pmatrix}$

$\mathbf{d_1}\cdot\mathbf{d_2} = a_x^2 - b_y^2$; $|\mathbf{d_1}|^2 = \mathbf{d_1}\cdot\mathbf{d_1} = a_x^2 + b_y^2$; $|\mathbf{d_2}|^2 = a_x^2 + b_y^2$

$\cos(\varphi) = \{ a_x^2 - b_y^2 \} / \{ \sqrt{a_x^2 + b_y^2}\,\sqrt{a_x^2 + b_y^2} \} = \{ a_x^2 - b_y^2 \} / \{ a_x^2 + b_y^2 \}$

Mit $a_x = 2\,b_y$: $\cos(\varphi) = 3\,b_y^2 / 5\,b_y^2 = 3/5$.

3) Formel von Heron - Fläche eines allgemeinen Dreiecks mit den Seiten a, b, c:

Doppelter Umfang 2 p = a + b + c

Fläche = $\sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)}$

3a Berechnung der Dreiecksseiten - $P_1(1|2|3)$, $P_2(2|0|5)$, $P_3(3|1|1)$

$\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-0 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{c} = \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Längen $a = \sqrt{1+4+4} = 3$, $b = \sqrt{18}$, $c = 3$

$2\,p = 6 + \sqrt{18} \rightarrow p = 3 + \sqrt{18} / 2$

$(\text{Fläche})^2 = (3 + \sqrt{18} / 2) \cdot (\sqrt{18} / 2) \cdot (3 - \sqrt{18} / 2) \cdot (\sqrt{18} / 2) = (9 - 18/4) \cdot (18/4) =$
$= (18/4) \cdot (18/4)$

Fläche = 18 / 4 = 4,5 FE (Flächeneinheiten)

3b Die Fläche eines Dreiecks mit den Seitenvektoren **a**, **b**, **c** ist gleich der halben Fläche eines Parallelogramms mit den Seiten **a** und **c** (beide Vektoren ausgehend vom gleichen Punkt P_1). Die Fläche dieses Parallelogramms ist der Betrag des Vektorprodukts **a x c**.

$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{c}| = \sqrt{36 + 36 + 9} = 9 \rightarrow$ Fläche = 4,5 FE

3c Skalarprodukte $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1 - 2 - 8 = -9$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 2 + 2 - 4 = 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 2 - 1 + 8 = 9$

cos(Winkel) - **a,b** $\rightarrow | -9 / (3\sqrt{18}) | = 1 / \sqrt{2}$; **a,c** $\rightarrow | 0 / 3 \cdot 3 | = 0$; **b,c** $\rightarrow 1 / \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Winkel 45°, 90°, 45° $\Rightarrow$ rechtwinklig und gleichseitig

3d Rechter Winkel zwischen **a** und **c** $\rightarrow$ Fläche = a c / 2 = 3 · 3 / 2 = 4,5 FE