Vektoren - Lineare Abhängigkeit

Linearkombination

Eine Linearkombination ist ein Ausdruck $r_1\,\mathbf{a_1} + r_2\,\mathbf{a_2} + ...$
Dabei nennt man die (reellen) Zahlen r_i auch Koeffizienten.

Lineare Abhängigkeit

Wenn ein Vektor durch eine Linearkombination aus anderen Vektoren erzeugt werden kann, dann besteht eine lineare Abhängigkeit.

$\mathbf{c} = s\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$, s und/oder $t \neq 0 \Rightarrow$ lineare Abhängigkeit

Allgemein:
Wenn $r\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{b} + t\,\mathbf{c} = \mathbf{0}$ und nicht <u>alle</u> Koeffizienten 0 sein <u>müssen</u>, damit die Gleichung erfüllt ist, dann sind die Vektoren linear <u>un</u>abhängig.

"Linear abhängig: Der Nullvektor **0** lässt sich nur durch eine Linearkombination erhalten, bei der <u>alle</u> Koeffizienten 0 sind."

Wenn zwei Vektoren voneinander linear abhängig sind, sind die zugeordneten Pfeile parallel oder antiparallel. (Die Länge kann verschieden sein.) Man nennt das **kollineare** Vektoren.

Wenn ein dritter Vektor als Linearkombination zweier anderer dargestellt werden kann, liegen die zugeordneten Pfeile alle in <u>einer</u> Ebene. Man nennt das **komplanare** Vektoren. (Das macht nur Sinn in R^3.)

Alle Vektoren, die als Linearkombination aus einer Grundmenge von Vektoren dargestellt werden können, bilden einen Teilraum. Man nennt dies die "**lineare Hülle**".

Vektoren in R^2

In zwei Dimensionen, also R^2, ist die Sachlage einfach.
Wenn $\mathbf{b} = s \cdot \mathbf{a}$, mit einem Skalar s, dann ist **b** linear abhängig von **a**.
Beispiel: $\mathbf{b} = \binom{-9}{12}$ ist linear abhängig von $\mathbf{a} = \binom{3}{-4}$ mit s = -3.

In der allgemeinen Formulierung: Es gilt dann $(-3) \cdot \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Dabei sind nicht <u>alle</u> Koeffizienten 0, die Vektoren sind daher linear abhängig.

Geometrisch bedeutet das gleiche oder genau gegensinnige Orientierung der beiden Vektoren.

Mit dieser geometrischen Überlegung sehen wir sofort, dass in R^2 es <u>nur 2 linear unabhängige Vektoren</u> geben kann, ein dritter ist stets linear abhängig. Jeder Pfeil in der Ebene kann aus zwei anderen Pfeilen in der Ebene kombiniert werden.

<u>*Beispiel*</u>:

Gegeben $\mathbf{a} = \binom{-2}{3}$; $\mathbf{b} = \binom{4}{-5}$; $\mathbf{c} = \binom{8}{-9}$. Ist **c** linear abhängig von **a** und **b**? Wenn "ja", wie?

♦ Die erste Frage ist trivial zu beantworten: Wir haben gelernt, dass es nie mehr als 2 linear unabhängige Vektoren in R^2 geben kann.

♦ Als Zweites müssen wir die Skalare s und t in der Gleichung $\mathbf{c} = s \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}$ finden. Vielleicht finden wir die Lösung durch Raten. Allgemein wird dazu das (lineare) Gleichungssystem für die Komponenten gelöst.

$8 = s \cdot -2 + t \cdot 4$

$-9 = s \cdot 3 + t \cdot -5$

2s = 4 t -8; s = 2 t - 4; eingesetzt: -9 = 6 t - 12 - 5 t; <u>t = 3</u> und damit <u>s =</u> 6 - 4 = <u>2</u>.

Kontrolle: $\mathbf{c} = 2 \cdot \mathbf{a} + 3 \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} (-4) + 12 = 8 \\ 6 + (-15) = -9 \end{pmatrix}$.

Erkennen der linearen Abhängigkeit

Für 2 Vektoren sieht man meistens mit einem Blick, ob ein Vektor ein Vielfaches eines Anderen ist. 3 Vektoren in R^2 sind auf jeden Fall linear abhängig. Man kann "sehr förmlich" vorgehen. (Das macht hier kaum Sinn, in R^3 werden wir aber genau so vorgehen!)

a) Lineares Gleichungssystem

Gilt **b** = s **a**? Dafür 2 Gleichungen für die Komponenten

① $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

[1] s ·(-2) = 4
[2] s · 3 = -5
Aus [1] s = -2 und aus [2] s = -5/3

Es gibt kein s, das für <u>beide</u> Komponenten gilt.
Die Vektorgleichung ist nicht erfüllt.
⇒ **a** und **b** sind linear **unabhängig**

② $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

[1] s ·(-2) = 4
[2] s · 3 = -5
Aus [1] s = -2 und aus [2] s = -2

Es gibt ein s, das für <u>beide</u> Komponenten gilt.
Die Vektorgleichung ist erfüllt.
⇒ **a** und **b** sind linear **abhängig**

Oder in der Form s · **a** + t · **b** = **0**

① $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

[1] s ·(-2) + t · 4 = 0
[2] s · 3 + t · (-5) = 0

Aus [1]: s = 2 t; in [2]: t = 0; damit s = 0
Die Vektorgleichung gilt nur für s = t = 0 ⇒ linear **unabhängig**

② $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

[1] s ·(-2) + t · 4 = 0
[2] s · 3 + t · (-5) = 0

Aus [1]: s = 2 t; in [2]: 0 ·t = 0, also 0 = 0
Es gibt eine Lösung mit einem freien Parameter (wegen linearer Abhängigkeit)
Für ein beliebiges t ≠ 0 gilt 2 t · **a** + t · **b** = **0** ⇒ linear **abhängig**

☹ Wie anfangs gesagt, dieses formale Vorgehen hat für 2 Vektoren wenig Sinn.
b = s **a** sieht man "mit einem Blick"!
Erst bei der Suche der Koeffizienten in **c** = s · **a** + t · **b** bei vorhandener linearer Abhängigkeit löst man das Gleichungssystem.
(Dass in R^2 **c** von **a** und **b** linear abhängig sein <u>muss</u>, ist ja nicht mehr gesondert zu überprüfen!)

b) Mit einer Determinante

(Natürlich auch wieder für R^2 ein "übertriebener Formalismus".)

Nach der Theorie der Linearen Gleichungssysteme muss für homogene Gleichungen (rechte Seite enthält Nullen) die Determinante der Koeffizienten 0 sein, wenn eine lineare Abhängigkeit besteht. In der Gleichung s · **a** + t · **b** = **0** sind s und t die Unbekannten und die Koordinaten von **a** und **b** sind die Koeffizienten.

$D = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$; D = 0 linear abhängig; D ≠ 0 linear unabhängig.

① $D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 12 \neq 0 \Rightarrow$ linear **unabhängig**

② $D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0 \Rightarrow$ linear **abhängig**

Hier ist auch keine Rechnung unbedingt nötig. Eine Determinante ist 0, wenn eine Zeile ein Vielfaches (oder gleich) einer anderen ist.

Hier ist in D_2 die zweite Zeile ein Vielfaches (· (-2)) der ersten.

<u>Hinweis</u>: Im Fall R^3 gilt die obige Bedingung für den Wert 0 einer Determinante auch. Dort gilt aber auch die (allgemeine) Erweiterung: "Die Determinante ist 0, wenn eine Zeile (oder Spalte) eine Linearkombination von anderen ist." Das "sture" Berechnen der Determinante ist aber meistens schneller als das Suchen nach dieser Bedingung.

Vektoren in R^3

In drei Dimensionen, also R^3, kann ein dritter Vektor von zwei anderen linear abhängig sein. Geometrisch liegt er dann in der Ebene, die aus den beiden anderen Vektoren aufgespannt ist. Mehr als 3 linear unabhängige Vektoren kann es nicht geben, weil jeder weitere im Raum aus den drei anderen erzeugt werden kann.

Drei Vektoren **a**, **b** und **c**.

Untersuchung von **c** = s · **a** + t · **b** oder in der allgemeinen Form r · **a** + s · **b** + t · **c** = **0**.

Wenn nur gefragt ist, <u>ob</u> drei Vektoren linear abhängig sind, ist das Determinanten-Verfahren am schnellsten. Wenn gefragt ist, <u>wie</u> drei Vektoren linear abhängig sind, ist Rechenarbeit nötig. (Ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen ist zu lösen.)

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{c_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{c_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Suche, <u>ob</u> linear abhängig, mit einer Determinante

$\mathbf{c_1}$: $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 15 - 2\cdot 30 + 3\cdot 15 = 0$

In diesem Fall ist es (rechentechnisch) geschickter, Zeile 1 und 3 zu vertauschen!

$D_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-3)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 3 + 3\cdot 3 = 0$

Determinante = 0 ⇒ linear **abhängig**

$\mathbf{c_2}$: $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 9 - 2\cdot 30 + 3\cdot 19 = 6$

Determinante ≠ 0 ⇒ linear **unabhängig**

Im Fall $\mathbf{c_1}$ würde es ausreichen, die Vektoren **a** und **b** als Grundmenge anzusehen, der Vektor $\mathbf{c_1}$ wäre dann ein Vektor in der linearen Hülle davon. (In R^3 gibt es dann weitere Vektoren, die nicht als Linearkombination von **a** und **b** darstellbar sind, also nicht zur lineare Hülle gehören.)

Im Fall $\mathbf{c_2}$ würden **a**, **b** und $\mathbf{c_2}$ eine Basis sein. Ein weiterer Vektor, der sich als Linearkombination darstellen lässt, gehört dann zur linearen Hülle. (Weil in R^3 es nur 3 linear unabhängige Basisvektoren gibt, wäre jeder weitere Vektor in R^3 ein Element dieser linearen Hülle.)

b) Lineares Gleichungssystem für $\boldsymbol{c} = s \cdot \boldsymbol{a} + t \cdot \boldsymbol{b}$

$\mathbf{c_1}$: s· 1 + 4 t = -3 / 2 s + 5 t = 0 / 3 s + 6 t = 3

	s	t	(rechte Seite)	
[1]	1	4	-3	
[2]	2	5	0	
[3]	3	6	3	
[1]	1	4	-3	
[2']	0	-3	6	| = [2] - 2 · [1]
[3']	0	-6	12	| = [3] - 3 · [1]

Aus [2'] t = -2, aus [3'] t = -2 → aus [1] s = -3 + 8 = 5

Es gibt eine eindeutige <u>Lösung</u>, s = 5 und t = -2. Linear **abhängig**.

$\mathbf{c_1} = 5\,\mathbf{a} - 2\,\mathbf{b}$

Wir haben damit gelöst, <u>ob</u> und <u>wie</u> lineare Abhängigkeit vorliegt.

$\mathbf{c_2}$: s· 1 + 4 t = -3 / 2 s + 5 t = 0 / 3 s + 6 t = 3

[1]	1	4	-3	
[2]	2	5	1	
[3]	3	6	3	
[1]	1	4	-3	
[2']	0	-3	7	| = [2] - 2 · [1]
[3']	0	-6	12	| = [3] - 3 · [1]

Aus [2'] t = -7/3, aus [3'] t = -2

Es gibt <u>keine</u> eindeutige <u>Lösung</u>. (Widerspruch in t). Linear **unabhängig**

♦ Nur bei linearer Abhängigkeit kann eine Lösung des Gleichungssystems - außer der trivialen Lösung r = s = t = 0 - gefunden werden.

Kontrolle der Koordinaten: 5·1 - 2·4 = -3; 5·2 - 2·5 = 0; 5·3 - 2·6 = 3.

c) Lineares Gleichungssystem für $r \cdot \boldsymbol{a} + s \cdot \boldsymbol{b} + t \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

$\mathbf{c_1}$: r· 1 + 4 s -3 t = 0 / 2 r + 5 s + t·0 = 0 / 3 r + 6 s + 3 t = 0

	r	s	t	(rechte Seite)	
[1]	1	4	-3	0	
[2]	2	5	0	0	
[3]	3	6	3	0	
[1]	1	4	-3	0	
[2']	0	-3	6	0	| = [2] - 2 · [1]
[3']	0	-6	12	0	| = [3] - 3 · [1]
[1]	1	4	-3	0	
[2']	0	-3	6	0	
[3'']	0	0	0	0	| = [3'] - 2 · [2']

[3'']: "0 = 0" $\rightarrow$ Die Lösung enthält einen freien Parameter. (Wir belassen dafür "t".)

Dann: s = 2 t und r = - 5 t $\Rightarrow$ - 5 t **a** + 2 t **b** + t $\mathbf{c_1}$ = **0**. linear **abhängig**

$\mathbf{c_1}$: r· 1 + 4 s -3 t = 0 / 2 r + 5 s + t·1 = 0 / 3 r + 6 s + 3 t = 0

	r	s	t		
[1]	1	4	-3	0	
[2]	2	5	1	0	
[3]	3	6	3	0	
[1]	1	4	-3	0	
[2']	0	-3	7	0	| = [2] - 2 · [1]
[3']	0	-6	12	0	| = [3] - 3 · [1]
[1]	1	4	-3	0	
[2']	0	-3	7	0	
[3'']	0	0	-2	0	| = [3'] - 2 · [2']

[3'']: "-2 = 0" $\rightarrow$ Widerspruch

Wir erhalten keine Lösung und schließen: linear **unabhängig**

Wenn man "trotzdem" weiterrechnet, erhält man t = 0, dann s = 0 und r = 0.

Es existiert also nur die triviale Lösung r = s = t = 0 und das bedeutet linear **unabhängig**.

- Wenn keine Lösung gefunden wird, sind die Vektoren linear unabhängig.
  Es gibt nur die triviale Lösung r = s = t = 0.

Übungen

1) Liegen **a**, **b** und **c** in <u>einer</u> Ebene? Sind **a**, **b** und **c** linear unabhängig?

   a) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$; $\mathbf{c} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$ b) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$; $\mathbf{c} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

2) Für welches X liegen die drei Vektoren in einer Ebene?

   a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-2\\1\\X\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}X\\2\\3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}3\\2\\X\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-3\\2\\7\end{pmatrix}$

3) a) In R^2 ist ein Vektor **c** <u>stets</u> von zwei anderen (**a** und **b)** linear abhängig, wenn **a** und **b** linear unabhängig voneinander sind.

   b) Was gilt, wenn **a** und **b** linear abhängig voneinander sind?

1) Beide Fragen sind äquivalent! (Wenn 3 Vektoren in <u>einer</u> Ebene liegen, kann einer der Vektoren aus den anderen erzeugt werden. Die Vektoren sind dann also linear abhängig.) Die Entscheidung geht am schnellsten über die Determinante.

   (Determinanten-Entwicklung, Sarrus-Schema hier umständlicher)

   a) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\3 & 1 & 3\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\1 & 3\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} = 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-6) = 0$

   $\Rightarrow$ in Ebene, linear abhängig

   (**c** = 2 **a** + 1/2 **b**)

   b) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\3 & 4 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\4 & 5\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\3 & 4\end{vmatrix} = 1 \cdot 10 + 1 \cdot (-6) \neq 0$

   $\Rightarrow$ nicht in Ebene, linear unabhängig

2) "In einer Ebene", falls Determinante = 0

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & X \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & X \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & X \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$

$3\,X - 2 - 8\,X - 8 + 12 + 18 = -5\,X + 20 = 0$

oder Sarrus-Schema

1	2	3	1	2	
4	3	2	4	3	
-2	1	X	-2	1	$3\,X + (-8) + 12 - (-18) - 2 - 8\,X = -5\,X + 20$

$\Rightarrow X = 4$

b) $\begin{vmatrix} X & 2 & 3 \\ 3 & 2 & X \\ -3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 2 & X \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & X \\ -3 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$

$14\,X - 2\,X^2 - 42 - 6\,X + 18 + 18 = -2\,X^2 + 8\,X - 6 = 0$

oder Sarrus-Schema

X	2	3	X	2	
3	2	X	3	2	
-3	2	7	-3	2	$14\,X + (-6\,X) + 18 - (-18) - 2\,X^2 - 42 = -2\,X^2 + 8\,X - 6$

$X^2 - 4\,X + 3 = 0 \rightarrow X_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} \Rightarrow X_1 = 1,\ X_2 = 3$

3) a) **c** linear abhängig: **c** = r **a** + s **b**

falls **a** und **b** linear abhängig: **a** = t **b**

in Komponenten: $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Lineares Gleichungssystem

[1]	$a_1\,r$	$+\,b_1\,s$	$= c_1$
[2]	$a_2\,r$	$+\,b_2\,s$	$= c_2$
[1']	$a_1\,a_2\,r$	$+\,a_2\,b_1\,s$	$= a_2\,c_1$
[2']	$a_1\,a_2\,r$	$+\,a_1\,b_2\,s$	$= a_1\,c_2$
[2'] - [1']		$s = \{ a_1\,c_2 - a_2\,c_1 \} / \{ a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \}$	
[1"]	$a_1\,b_2\,r$	$+\,b_1\,b_2\,s$	$= b_2\,c_1$
[2"]	$a_2\,b_1\,r$	$+\,b_1\,b_2\,s$	$= b_1\,c_2$
[2"] - [1"]		$r = \{ b_1\,c_2 - b_2\,c_1 \} / \{ a_2\,b_1 - a_1\,b_2 \}$	

⇒ Es gibt zwei Zahlen r und s, falls nicht durch 0 dividiert wird.

Der Nenner ist 0, wenn $\{ a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \} = 0$.

Dies ist der Fall, wenn **a** und **b** linear abhängig sind. Wenn **a** = t **b**:

$a_1 = t\,b_1$ und $a_2 = t\,b_2 \rightarrow a_1 / b_1 = a_2 / b_2 \rightarrow a_1\,b_2 = a_2\,b_1$

⇒ Im Fall a) muss **c** von **a** und **b** linear abhängig sein.

b) Bei linearer Abhängigkeit **a**, **b** ergibt sich für r und s ein Ausdruck "0/0".

Das ist ein "nicht definiertes Ergebnis". (siehe dazu unten "Ergänzung")

Die Ausgangsgleichung **c** = r **a** + s **b** zeigt, warum "nicht definiert".

Bei linearer Abhängigkeit **a**, **b** ist **c** = r **a** + s t **a** = (r + s t) **a**.

c kann kollinear mit **a** sein, dann hat r und/oder s einen bestimmten Wert. Falls **c** nicht kollinear mit **a** ist, gibt es keine Lösung für r und s.

⇒ Im Fall b) kann **c**, muss aber nicht, von **a** (und damit auch **b**) linear abhängig sein.

Wenn als Basis 2 linear unabhängige Vektoren gewählt werden, muss jeder weitere Vektor in R^2 eine Linearkombination davon sein. Die lineare Hülle enthält im Fall a) also alle Vektoren in R^2. Im Fall b) liegt innerhalb der "Basis" eine lineare Abhängigkeit vor. Bei Beachtung der präzisen Definition sind diese beiden Vektoren keine Basis! Nur 2 linear unabhängige Vektoren können in R^2 eine Basis bilden! **a** (oder **b**) ist eine Grundmenge, und **b** (oder **a**) gehört zur linearen Hülle dazu. Ein weiterer Vektor **c** kann (muss aber nicht) auch zur linearen Hülle gehören, falls er von **a** (oder **b**) linear abhängt.

"Ergänzung" - zu "0/0"

Eine (erlaubte) Möglichkeit ist, eine Division durch 0 stets als "nicht definiert" anzusehen. Dann ist auch "0/0" gleichartig wie (Zahl $\neq 0$) / 0. Ein prinzipieller Unterschied ist durch die Erklärung der Division über die Multiplikation erkennbar:

$a \cdot x = b$ definiert die Division $x = b / a$. Sei nun $a = 0$!

falls $b \neq 0$: $0 \cdot x = b \Rightarrow$ es gibt kein solches x
Division durch 0 ist unmöglich. (nicht definiert).

falls $b = 0$: $0 \cdot x = 0 \Rightarrow$ das ist für jedes x erfüllt
Die Division liefert ein nicht definiertes Ergebnis.
Jede Zahl x ist möglich.

Zum Fall "0/0" ist anzumerken, dass "nicht definiertes Ergebnis" auch durch Grenzwertbetrachtungen verifiziert werden kann. ($3x^2 / x$ für $x \to 0$: 3; $4x^2 / x$ für $x \to 0$: 4; usw., also verschiedene Werte)

"Ergänzung" - Was geschieht im Linearen Gleichungssystem bei mehrfacher linearer Abhängigkeit?

Sei: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$; $\mathbf{c} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}$. - $\mathbf{b} = 3\,\mathbf{a}$ und $\mathbf{c} = -2\,\mathbf{a}$

$r + 3s - 2t = 0$ / $2r + 6s - 4t = 0$ / $3r + 9s - 6t = 0$

	r	s	t		
[1]	1	3	-2	0	
[2]	2	6	-4	0	
[3]	3	9	-6	0	
[1]	1	3	-2	0	
[2']	0	0	0	0	$\mid = [2] - 2 \cdot [1]$
[3']	0	0	0	0	$\mid = [3] - 3 \cdot [1]$

Es liegen 2 Zeilen "0 = 0" vor, die Lösung enthält 2 freie Parameter.
Falls "s" und "t" dafür belassen: $r = 2t - 3s$ und insgesamt $(2t - 3s)\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{b} + t\,\mathbf{c} = \mathbf{0}$