Vektoren - Lineare Abhängigkeit - Vier Vektoren in R^3

Aufgabe (in R^3):

"**Suche die Linearkombination für einen vierten gegebenen Vektor**"

$\mathbf{d} = r \cdot \mathbf{a} + s \cdot \mathbf{b} + t \cdot \mathbf{c}$.

Ein Lösungsweg verläuft ähnlich wie die Suche nach einer linearen Abhängigkeit zwischen drei Vektoren **a**, **b** und **c**. Anstelle der Nullen sind dann die Koordinaten von **d** auf der rechten Seite einzusetzen. Die Lösung ist die gesuchte Linearkombination.

Eine solche Aufgabe macht eigentlich nur Sinn, wenn **a**, **b**, **c** linear unabhängig sind.

Es gibt maximal 3 linear unabhängige Vektoren in R^3, ein vierter Vektor muss dann linear abhängig sein.

Wenn vorher - d.h. zwischen **a**, **b**, **c** - lineare Abhängigkeit besteht, ist einer dieser drei Vektoren überflüssig in der Linearkombination für **d**.

Eine gefundene Linearkombination, die alle drei Vektoren **a**, **b** und **c** enthält, ist dann eine künstlich erweiterte Konstruktion, die auf den sinnvollen Fall reduziert werden kann.

➔ Sinnvoll ist, eine Linearkombination aus linear unabhängigen Vektoren anzugeben.

Die Aufgabenstellung könnte auch Irreführung sein! Es ist möglich, dass **d** nicht als Linearkombination von **a**, **b** und **c** dargestellt werden kann.

- Wenn **a**, **b** und **c** linear unabhängig sind, kann dies nicht vorkommen! Wir wissen, dass dann jeder vierte Vektor eine Linearkombination von **a**, **b** und **c** sein muss.
- Wenn **a**, **b** und **c** linear abhängig sind, ist dies möglich. Einer oder zwei davon sind nichts Neues, sondern eine Linearkombination der anderen. **d** wäre damit ein "dritter" Vektor in R^3 - und dieser kann, muss aber nicht unbedingt, aus den anderen durch Linearkombination entstehen.

Hinweis zu den Beispielen: Ob zwischen **a**, **b** und **c** lineare Abhängigkeit besteht, wurde schon in "Lineare Abhängigkeit" untersucht.

Beispiel 1 - **a**, **b**, **c** linear unabhängig

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix}$

$r \cdot 1 + 4s - 3t = 36$	$r + 4s - 3t = 36$	...		
$2r + 5s + t \cdot 1 = 18$	$r + 5/2\, s + 1/2\, t = 9$	$3/2\, s - 7/2\, t = 27$		
$3r + 6s + 3t = 12$	$r + 2s + t = 4$	$2s - 4t = 32$	$3/2\, s - 3t = 24$	$-1/2\, t = 3$

Rücksubstitution: $t = -6$; $2s = 32 + 4 \cdot (-6) = 8$; $s = 4$; $r = 36 - 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-6) = 2$

$\mathbf{d} = 2\,\mathbf{a} + 4\,\mathbf{b} - 6\,\mathbf{c}$

(Diese Aufgabe wäre also sinnvoll.)

Das Ergebnis ist wie erwartet. In R^3 bilden 3 linear unabhängige Vektoren eine Basis. Jeder weitere Vektor gehört notwendigerweise dann zur linearen Hülle.

Beispiel 2 - **a**, **b**, **c** linear <u>abhängig</u>

a = $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; **b** = $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$; **c** = $\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$; **d** = $\begin{pmatrix}36\\18\\12\end{pmatrix}$

Bekannte lineare Abhängigkeit: **c** = 5 **a** - 2 **b**

$r \cdot 1 + 4s - 3t = 36$	$r + 4s - 3t = 36$	...		
$2r + 5s + t \cdot 0 = 18$	$r + 5/2\, s = 9$	$3/2\, s - 3t = 27$		
$3r + 6s + 3t = 12$	$r + 2s + t = 4$	$2s - 4t = 32$	$3/2\, s - 3t = 24$	$0 = 3$

Es folgt ein Widerspruch (0=3).

Weil **c** linear abhängig von **a** und **b** ist, wird - richtig betrachtet - untersucht, ob **d** als Linearkombination von **a** und **b** dargestellt werden kann. Das ist hier <u>nicht</u> der Fall. Es gibt <u>keine</u> Linearkombination aus **a**, **b**, **c** - bzw. präziser aus **a** und **b** - für **d**.
Zusätzlich: Die Hinzunahme von **c** in die Aufgabe dient nicht der Lösung, sondern verwirrt nur.

(Diese Aufgabe wäre also mindestens "wenig sinnvoll" oder "eher Irreführung".)

Die Grundmenge besteht aus **a** und **b**. **c** gehört zur linearen Hülle davon. **d** gehört nicht zur linearen Hülle. Das ist möglich, weil nicht alle Vektoren in der Obermenge R^3 auch zur linearen Hülle gehören müssen.

Beispiel 3 - **a**, **b**, **c** linear <u>abhängig</u>

a = $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; **b** = $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$; **c** = $\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$; **d** = $\begin{pmatrix}36\\48\\60\end{pmatrix}$

$r \cdot 1 + 4s - 3t = 36$	$r + 4s - 3t = 36$	...		
$2r + 5s + t \cdot 0 = 48$	$r + 5/2\, s = 24$	$3/2\, s - 3t = 12$		
$3r + 6s + 3t = 60$	$r + 2s + t = 20$	$2s - 4t = 16$	$3/2\, s - 3t = 12$	$0 = 0$

Die letzte Zeile liefert keine Information zu t. t ist damit ein freier Parameter.
Dann s = 8 + 2t und r = 4 - 5 t.
Damit: **d** = (4 - 5 t) **a** + (8 + 2 t) **b** + t **c**
Wahl t = 0:

dann ist **d** = 4 **a** + 8 **b** 🡐 (sinnvoll)

Koordinaten-Kontrolle: 4+32=36; 8+40=48; 12+48=60.

Wahl t = 2:

dann ist d = -6 **a** + 12 **b** + 2 **c**

weil aber auch **c** = 5 **a** - 2 **b** → **d** = -6 **a** + 12 **b** + 10 **a** - 4 **b** = 4 **a** + 8 **b**

Die Rechnung liefert für den Parameterwert t = 0 eine sinnvolle Linearkombination, aber auch (unendlich) viele andere, die künstlich entstehen, weil ein schon linear abhängiger Vektor **c** zusätzlich in die Liste mit aufgenommen wurde. Alle Formen lassen sich auf eine sinnvolle Form, **d** als Linearkombination von **a** und **b**, zurückführen.
(War der Zweck der Aufgabe vielleicht, diese Irreführung zu erkennen?)

Beispiel 4 - **a**, **b**, **c** linear abhängig

Dieselben Vektoren wie in Beispiel 3. Nur ein etwas anderer Lösungsweg.

$r \cdot 1 + 4s - 3t = 36$
$2r + 5s + t \cdot 0 = 48$
$3r + 6s + 3t = 60$ Umgestellt für anderen Lösungsweg

$4s - 3t + r = 36$	$4s - 3t + r = 36$	...		
$5s + t \cdot 0 + 2r = 48$	$4s + 8/5\, r = 192/5$	$-3t - 23/5\, r = -12/5$		
$6s + 3t + 3r = 60$	$4s + 2t + 2r = 40$	$-5t - r = -4$	$-3t - 3/5\, r = -12/5$	$0 = 0$

Freier Parameter r. Dann $t = 4/5 - 1/5\, r$ und $s = 48/5 - 2/5\, r$.

$\mathbf{d} = r\,\mathbf{a} + (48/5 - 2/5\, r)\,\mathbf{b} + (4/5 - 1/5)\,\mathbf{c}$

(Eine andere Linearkombination, weil r anstelle von t der freie Parameter ist.)

Wahl $r = 0$:

dann $\mathbf{d} = 48/5\,\mathbf{b} + 4/5\,\mathbf{c}$

und bei Ersetzen von **c** ($\mathbf{c} = 5\,\mathbf{a} - 2\,\mathbf{b}$): $\mathbf{d} = (48/5 - 8/5)\,\mathbf{b} + 4\,\mathbf{a} = 4\,\mathbf{a} + 8\,\mathbf{b}$ 🡐

Wahl $r = 2$:

dann $\mathbf{d} = 2\,\mathbf{a} + 44/5\,\mathbf{b} + 2/5\,\mathbf{c}$

und bei Ersetzen von **c**: $\mathbf{d} = (2 + 2)\,\mathbf{a} + (44/5 - 4/5)\,\mathbf{b} = 4\,\mathbf{a} + 8\,\mathbf{b}$ 🡐

$\Rightarrow$ Wenn man in Beispiel 3 und 4 die durch die Hinzunahme von **c** künstlich erzeugten verschieden aussehenden Formeln, die auch noch einen freien Parameter enthalten, durch das Einsetzen der Linearkombination für **c** bereinigt, entsteht die gleiche Endform, **d** als Linearkombination von **a** und **b**.

! Wenn die Grundmenge auch linear abhängige Vektoren enthält, sind verschiedene Darstellungen für die Linearkombination möglich. Wenn man die Koeffizienten als "Koordinaten" bezüglich dieser "Basis" auffassen würde, entsteht eine Mehrdeutigkeit. Dies ist nicht sinnvoll! Daher wird als Basis eine Grundmenge aus linear unabhängigen Vektoren definiert. Dann ist die dazugehörende Koordinatendarstellung auch eindeutig!