Vektoren - Die Basis

Motivation

(Als Vereinfachung - der Schreibarbeit - wählen wir meistens Vektoren in R^2.)

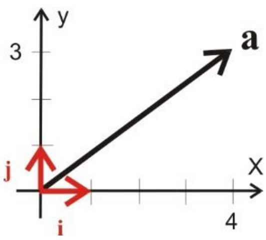
Eigentlich ist ja Alles klar! Für einen Vektor **a** gilt **a** = $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$!

Am Ende werden wir sehen, dass wir für die "üblichen" Anwendungen in der Analytischen Geometrie weiter so verfahren können! Durch eine spezielle Wahl der Basis machen wir alles richtig!

Wir verwenden das rechtwinklige kartesische Koordinatensystem und darin sind a_x und a_y die Koordinaten des Endpunkts des Ortsvektors **a** (genauer des entsprechenden Repräsentanten). Was würde geschehen, wenn wir aber ein nicht kartesisches Koordinatensystem verwenden? Dann hätten wir sicher andere Koordinaten. Zum einen ist es daher sinnvoll, klare Verhältnisse herbeizuführen. Zum anderen ist vom Standpunkt einer formalen Theorie es zweckmäßig, eine Definition zu benutzen, die nicht streng mit der Wahl eines Koordinatensystems verknüpft ist. Eine solche allgemeine Festlegung kann dann leichter auf eine spezielle Wahl angewandt werden.

Die bisherige Vorgehensweise - Angabe von Koordinaten - ist hier umformuliert. Ein Vektor ist nun eine Linearkombination zweier Basisvektoren **i** und **j**.

Weil wir **i** und **j** "sehr geschickt" gewählt haben, sind die Koeffizienten der Linearkombination dieselben Zahlen wie die gewohnten Koordinaten im Achsensystem!



Damit ist auch die gewünschte allgemeine Definition gegeben:

a = a_x **i** + a_y **j**.

(Unwichtig sind Nomenklatur-Fragen! Anstelle von **i** und **j** könnten wir $\mathbf{b_1}$ und $\mathbf{b_2}$ oder $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$ schreiben. Anstelle von a_x und a_y auch a_1 und a_2. **i** und **j** - und für R^3 noch **k** - sind die am häufigsten benutzte Wahl für die Standardbasis in der Analytischen Geometrie.)

Wir wissen bereits, dass in R^2 jeder weitere Vektor aus zwei linear unabhängigen Vektoren durch Linearkombination erzeugt werden kann. Verallgemeinert:

> In einem n-dimensionalen Raum werden n linear unabhängige Basisvektoren benötigt. Dann kann jeder weitere Vektor als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.

Eine "sinnvolle" bzw. "bequeme" Basis

In R^2 benötigen wir 2 Basisvektoren. Diese müssen linear unabhängig sein, damit alle weiteren Vektoren in R^2 dargestellt werden können.

Wir verdeutlichen das in R^2 noch geometrisch. Die Basisvektoren seien **a** und **b**. Wenn **a** linear abhängig von **b** ist, dann gilt **a** = r · **b**. **a** und **b** beschreiben eine Linie verschiedener Länge, aber gleicher Orientierung. Damit lassen sich unmöglich alle weiteren Punkte der Ebene durch eine Kombination s · **a** + t · **b** erreichen, weil alle diese Punkte irgendwo auf einer Verlängerung von **a** (oder **b**) liegen. Eine Basis muss aber die Grundlage sein, alle Punkte der Ebene durch Kombination der Basisvektoren zu erreichen.

Eine "Nomenklatur-Frage" kann jetzt gelöst werden.

Ein Vektor ist als Linearkombination der Basisvektoren definiert:

$\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{e_1} + a_2\,\mathbf{e_2}$.

> Dann hat **a** die 2 <u>Komponenten</u> $a_1\,\mathbf{e_1}$ und $a_2\,\mathbf{e_2}$.
> Bezüglich dieser Basis $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ sind die <u>Koordinaten</u> a_1 und a_2.

Für eine spezielle Wahl $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, wie in der Skizze, haben daher die Koordinaten bezüglich der Basis den gleichen Zahlenwert wie die Koordinaten im Achsensystem, a_x und a_y.

! Wie die Basisvektoren gewählt werden, ist unwichtig, solange wir als Operationen nur Addition, Subtraktion und die Multiplikation mit einem Skalar betrachten.

Beispiel: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

Komponenten: $(a_1\,\mathbf{e_1} + a_2\,\mathbf{e_2}) + (b_1\,\mathbf{e_1} + b_2\,\mathbf{e_2}) = (a_1 + b_1)\,\mathbf{e1} + (a_2 + b_2)\,\mathbf{e_2}$

Koordinaten: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$, wenn sich <u>alle</u> Koordinaten auf $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ beziehen.

Die Koordinaten können addiert werden, wie wir es gewohnt sind.

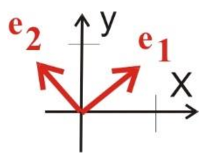
Zwar können alle Zahlenwerte der Koordinaten anders sein als beim Bezug auf die Standardbasis. Aber es gilt immer noch, dass die Koordinaten addiert werden, wenn die Summe von Vektoren gebildet wird.

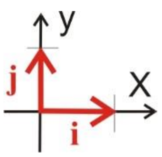
Die <u>Wahl</u> ist aber <u>sehr wichtig</u>, wenn <u>Produkte</u> betrachtet werden.
Die gewohnte, kurze, Formel für die Koordinaten gilt nur für eine spezielle Wahl, ein <u>orthonormales</u> Basissystem.

Orthonormal ist zusammengesetzt aus orthogonal (= die Vektoren stehen senkrecht aufeinander) und normiert (= die Vektoren haben die Länge 1).

<u>*Beispiel*</u>:

Eine orthonormale Basis $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$:
Senkrecht aufeinander und Länge 1
ABER: Die Koordinaten bezüglich der Basis haben andere Werte als die Koordinaten im Achsensystem!





Das ist optimal! (Gleiche Zahlen für die Koordinaten)

Das ist die "**Standardbasis**" $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$

> Die "Standardbasis" hat große Vorteile!
> Wegen der Gleichheit der Zahlen für die Koordinaten (Basis / Achsensystem) folgen keine Fehler, wenn man keine Unterscheidung macht.
> Wenn nicht explizit etwas Anderes gesagt wird, verwendet man in der Analytischen Geometrie die Standardbasis.

Die Standardbasis ist der am häufigsten benutzte Fall einer orthonormalen Basis! Man darf nur nicht behaupten, sie wäre die einzig mögliche orthonormale Basis.

Koordinatendarstellung der Basis

Standardbasis: Z.B. **i** ist ein Einheitsvektor (Länge = 1), der in die Richtung der x-Achse des kartesischen Koordinatensystem zeigt. **i** kann auch als Linearkombination der Basisvektoren geschrieben werden. Dann gilt formal: **i** = 1·**i** + 0·**j**.

Damit kann man auch die Koordinaten bezüglich der Basis angeben:

i = $\binom{1}{0}$ und **j** = $\binom{0}{1}$

In der Angabe der Koordinaten bezieht ein Basisvektor sich auf das Gesamtsystem aller Basisvektoren, also quasi "auf sich selbst".

Alternativ können die Spaltenvektoren **i** und **j** als Angabe der Koordinaten im kartesischen Koordinatensystem aufgefasst werden.

In R^3 gilt analog für 3 Komponenten / Koordinaten: **i** = $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, **j** = $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, **k** = $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Wenn auch die Basisvektoren als solche Spaltenvektoren geschrieben werden, kann die Verknüpfung eines Vektors mit der Basis in einer Gleichung geschrieben werden, in der nur Spaltenvektoren vorkommen.

Anstelle von **a** = a_x **i** + a_y **j** ist die Schreibweise **a** = $\binom{a_x}{a_y}$ = $a_x \binom{1}{0}$ + $a_y \binom{0}{1}$ möglich.

Allgemeine Basis:

Die Basis bestehe aus den Vektoren $\mathbf{b}^{(1)}$ und $\mathbf{b}^{(2)}$**.** Ein Basisvektor, z.B. $\mathbf{b}^{(1)}$ hat dann eine Koordinaten-Darstellung $\begin{pmatrix}b_1^{(1)}\\b_2^{(1)}\end{pmatrix}$; dann sind beliebige Zahlen möglich.

Als Koordinaten geben sie den Zusammenhang mit einer anderen Basis an. Das ist praktisch immer die Standardbasis. Dann sind die Zahlen auch als die Koordinaten im kartesischen Koordinatensystem aufzufassen.

$\mathbf{b}^{(1)}$ = $\binom{2}{-3}$ bedeutet dann also $\mathbf{b}^{(1)}$ = 2 **i** - 3 **j**. Oder anders geschrieben $\mathbf{b}^{(1)}$ = 2 $\binom{1}{0}$ - 3 $\binom{0}{1}$.
Oder anders interpretiert: Der Endpunkt des Ortsvektors zu $\mathbf{b}^{(1)}$ hat dann die kartesischen Koordinaten x = 2 und y = -3.
Wenn sich die Basis {$\mathbf{b}^{(1)}$, $\mathbf{b}^{(2)}$} auf eine andere Basis {$\mathbf{c}^{(1)}$, $\mathbf{c}^{(2)}$} bezieht, würde
$\mathbf{b}^{(1)}$ = $\binom{2}{-3}$ $\mathbf{b}^{(1)}$ = 2 $\mathbf{c}^{(1)}$ - 3 $\mathbf{c}^{(2)}$ bedeuten.

Das Skalarprodukt

Allgemeine Basis {$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$} und Anwendung der Definition des Skalarprodukts:

$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = |\,\mathbf{e}_1\,| \cdot |\,\mathbf{e}_2\,| \cdot \cos(\varphi)$, φ = Winkel zwischen $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$

Das Ergebnis ist jeweils irgendeine Zahl, die nicht 0 oder 1 sein muss!

Einfach ist die Sache nur für die Standardbasis (Spezialfall der Orthonormalbasis):
In R^2 gilt **i·i** = **j·j** = 1 und **i·j** = 0.

In R^3 gilt **i·i** = **j·j** = **k·k** = 1 und **i·j** = **i·k** = **j·k** = 0.

Man kann das auch "eleganter" schreiben - mit dem Kronecker-Symbol $\delta_{xy} = \begin{cases} 0 \text{ für } x \neq y \\ 1 \text{ für } x = y \end{cases}$

{$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$} ist eine Orthonormalbasis, falls $\mathbf{b}_x \cdot \mathbf{b}_y = \delta_{xy}$.

Wir betrachten zwei Vektoren

als Linearkombination: $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{e_1} + a_2\,\mathbf{e_2}$ und $\mathbf{b} = b_1\,\mathbf{e_1} + b_2\,\mathbf{e_2}$

als Spaltenvektoren in der Basis $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}\}$: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Für ein Skalarprodukt ist allgemein: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ =

$\rightarrow \quad a_1\,b_1\,\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_1} \quad + \quad a_2\,b_2\,\mathbf{e_2}\cdot\mathbf{e_2} \quad + \quad a_1\,b_2\,\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_2} \quad + \quad a_2\,b_1\,\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_2}$

Für die Orthonormalbasis verkürzt sich das! (hier für $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ geschrieben)

$$\begin{array}{llllllll} \rightarrow & a_1\,b_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} & + & a_2\,b_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} & + & a_1\,b_2\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} & + & a_2\,b_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} \\ & a_1\,b_1 & + & a_2\,b_2 & & = 0 & & = 0 \end{array}$$

Die allgemeine Formel enthält 4 Terme. Zusätzlich müssen wir die 4 Skalarprodukte der Basisvektoren $\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_1}$, ... ausrechnen. Diese Produkte sind im allgemeinen Fall meistens weder 0 noch 1.

Bei der Orthonormalbasis verschwinden zwei Terme, weil $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$. Zusätzlich ist schon bekannt, dass $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$. Dann, und nur dann, gilt die Formel $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2$.

Wichtig für die verkürzte Formel ist also eine Orthonormalbasis.

Das <u>kann</u> die Standardbasis sein, <u>muss</u> es <u>aber</u> <u>nicht</u> unbedingt sein.

Geometrisch: Zwischen zwei Vektoren ist ein bestimmter Winkel φ. Das haben wir für die Standardbasis gefunden. Wenn wir die <u>gesamte</u> Figur - die Basisvektoren und die beiden Vektoren - drehen, haben wir eine neue orthonormale Basis. Der Winkel φ bleibt aber derselbe!

Das Vektorprodukt

Wenn wir in R^3 $(a_1\,\mathbf{e_1} + a_2\,\mathbf{e_2} + a_3\,\mathbf{e_3}) \times (b_1\,e_1 + b_2\,\mathbf{e_2} + b_3\,\mathbf{e_3})$ bilden haben wir Produkte mit gleichen Basisvektoren $\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_1}$, ... und mit verschiedenen $\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_2}$, ...

Mit der Definition $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\varphi)$ werden die Produkte leicht auswertbar.

Hier geschrieben für die Standardbasis, aber es gilt für jede orthonormierte Basis!

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ (Das Vektorprodukt von zwei gleichen Vektoren ist der Nullvektor.)

Für die gemischten Produkte beachten wir die übliche Wahl eines Rechtssystems. Das brauchen wir zur Festlegung der Orientierung.

(Anordnung von **i**, **j**, **k** gleich der gewohnten Anordnung von x, y, z im kartesischen Koordinatensystem.)

Der Betrag ist jeweils 1 wegen der Normierung und $\sin(90°) = 1$.

Wir sehen $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$.

Entweder probieren wir (Rechte Hand Regel) $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\,\mathbf{k}$ oder verwenden die Eigenschaft, dass das Vektorprodukt antikommutativ ist, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Ebenso finden wir $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ und die Vertauschungen $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\,\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\,\mathbf{j}$.

Nun wird die Summe aller Kreuzterme berechnet. (Die Terme mit gleichen Basisvektoren enthalten den Nullvektor und verschwinden dann in der abschließenden Summation.)

💣 Dabei müssen wir die Reihenfolge beachten, weil das Kreuzprodukt antikommutativ ist!

Koordinaten	Basis	=	Koordinaten	Basis	=
$a_1\, b_2$	**i** x **j**	**k**	$a_2\, b_1$	**j** x **i**	- **k**
$a_1\, b_3$	**i** x **k**	- **j**	$a_3\, b_1$	**k** x **i**	**j**
$a_2\, b_3$	**j** x **k**	**i**	$a_3\, b_2$	**k** x **j**	- **i**

Nun wird sortiert:

i: + a_2 b3 - $a_3\, b_2$ **j**: + $a_3\, b_1$ - $a_1\, b_3$ **k**: + $a_1\, b_2$ - $a_2\, b_1$

Weil die Form solcher Produkte "irgendwie bekannt vorkommt":

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Im Term mit **j** werden zwei Spalten vertauscht:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ... \qquad - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + ...$$

Und dies ist die Entwicklung einer 3 x 3 Determinante!

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{oder mit x,y,z anstelle von 1,2,3} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Diese Formel gilt nach der Herleitung nur für eine Orthonormalbasis. Der Produktvektor hat Koordinaten bezüglich dieser Basis. In der Regel verwendet man die Standardbasis.

Wir erhalten als Ergebnis den Produktvektor. Die Berechnung des Betrags und die resultierende Richtung sind in der Herleitung enthalten.

Mathematisch streng betrachtet, ist die angegebene Formel keine Determinante, weil verschiedene Objekte - Vektoren und Zahlen - vermischt werden. **Als** einfache **Merkregel** für die Berechnung des Kreuzprodukts ist sie aber **nützlich**!

Übungsfragen - zum Verständnis

1) Bilden **a** = $\binom{4}{3}$ und **b** = $\binom{-8}{-6}$ eine mögliche Basis in R^2?

2) Bilden **a** = $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und **b** = $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ eine mögliche Basis in R^3?

3) Basis **a** = $\binom{3}{4}$ und **b** = $\binom{-4}{3}$

   a) Zeige, dass **a** und **b** eine mögliche Basis in R^2 sind.

   b) Zeige, dass dies eine orthogonale Basis ist.

   c) Erzeuge daraus eine orthonormale Basis.

4) **a** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, **b** = $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und **c** = $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ bilden keine orthonormierte Basis in R^3.

   Wie kann man das am schnellsten feststellen?

1) "Mit einem Blick": **b** = - 2 **a**. Die Vektoren sind linear abhängig. Zwei Basisvektoren in R^2 müssen linear unabhängig sein. ⇒ nein

2) Eine Basis in R^3 muss aus drei (linear un abhängigen) Vektoren bestehen. ⇒ nein

3) a) "linear unabhängig" zeigen.

Mit einer Determinante: $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$ = 9 + 16 ≠ 0

oder Ergebnis von b) benutzen (orthogonale Vektoren sind auch linear unabhängig).

b) Orthogonal, wenn **a** ⊥ **b** → **a**·**b** = 0. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ = -12 + 12 = 0 ⇒ ja

c) Weil die Basis schon orthogonal ist, müssen nur **a** und **b** normiert werden.

|**a**| = $\sqrt{9+16}$ = 5; |**b**| = 5; orthonormiert: **a'** = $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; **b'** = $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

4) Ohne jede Rechnung! Die Vektoren haben einen Betrag ≠ 1, sind also nicht normiert. Ob die Vektoren orthogonal sind oder linear unabhängig, muss für die Beantwortung der Frage gar nicht mehr überprüft werden.