Vektoren - Basiswechsel

Grundprinzip

Für rein geometrische Anwendungen verwendet man üblicherweise die Standardbasis. Damit ergibt sich in den Zahlenangaben der Koordinaten kein Unterschied zu einem Bezug gleich auf die Achsen eines kartesischen Koordinatensystems.
Die Verwendung einer anderen Basis muss also einen Sinn machen. Als Anwendung kommen Berechnungen in Kristallgittern vor. Dort sind "Elementarzellen" nicht mehr unbedingt rechtwinklig. Wenn man sich dann auf dazu passende nicht mehr orthogonale Basisvektoren bezieht, werden die weiteren Berechnungen deutlich einfacher.
Ein anderer Gesichtspunkt ist, dass von der formalen Theorie her eine allgemeine Basis nötig ist. Wir führen daher die Überlegung durch, obwohl sie für rein-geometrische Anwendungen nicht zwingend erforderlich ist.

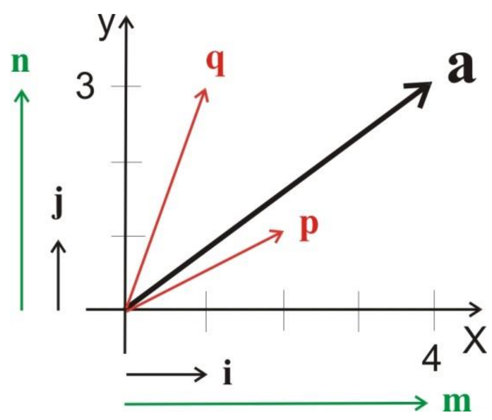
> Entscheidend ist nun: Das Objekt "Vektor" muss das gleiche bleiben, auch wenn sich die Basis ändert. Was sich ändert, ist die Darstellung mit Koordinaten!

Eine analoge Überlegung: Auf einem Blatt Papier soll ein Pfeil gezeichnet werden soll - mit bestimmter Länge und Orientierung relativ zu den Seiten des Papiers. Dann spielt es keine Rolle, in welchem Winkel der Zeichnende das Papier vor sich hinlegt. Wenn er die Länge berücksichtigt, ist es egal, ob er in cm oder (als Amerikaner) in inch abmisst. Die Basis - Orientierung des Papiers oder Maßstab spielt keine Rolle, das Endergebnis - der Pfeil auf dem Papier ist immer gleich.

Beispiel zur Umrechnung der Koordinaten

Die Skizze zeigt den Vektor **a** und drei verschiedene Basissysteme.

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$;



1. Die Standardbasis:

$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

In dieser Basis ist offenkundig

$$\mathbf{a} = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das ist nur die Wiederholung der Gleichheit der Koordinaten in der Standardbasis und im kartesischen Koordinatensystem.

2. Fritz Schlaumeier hat sich eine andere Basis überlegt:

$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

! Die Koordinatendarstellung der Basisvektoren **m** und **n** bedeutet eine Angabe bezüglich einer zugrundliegenden, anderen Basis. Welcher? Für die Analytische Geometrie ist das praktisch immer die **Standardbasis**!

Die Komponenten-Darstellung ist also: $\mathbf{m} = 4 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$ und $\mathbf{n} = 0 \cdot \mathbf{i} + 3 \cdot \mathbf{j}$
unter Benutzung der üblichen Standardbasis $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$.

Damit folgt das "schwierige" Problem, die Komponentendarstellung in dieser Basis zu finden.

$\mathbf{a} = a_m \cdot \mathbf{m} + a_n \cdot \mathbf{n}$. Die Koordinatendarstellung des Vektors in dieser Basis ist $\binom{a_m}{a_n}$.

"Mit einem Blick" haben wir die Lösung: $a_m = 1$ und $a_n = 1$, weil $1 \cdot \binom{4}{0} + 1 \cdot \binom{0}{3} = \binom{4}{3}$.

Weil die Koordinatendarstellung von **m** und **n** sich auf die Standardbasis bezieht, beziehen wir uns in der Linearkombination auch auf diese und berechnen deren Darstellung auch in der Standardbasis.

Derselbe Vektor **a** hat also in der Basis $\{\mathbf{m},\mathbf{n}\}$ die anderen Komponenten (Koordinaten) $\binom{1}{1}$

! Ein Vektor hat in verschiedenen Basis-Systemen verschiedene Koordinaten!
Es ist aber immer noch derselbe Vektor!

Fritz Schlaumeier versteht das auch sofort **anschaulich**:
Der Vektor **a** gibt einen Weg an, den er gehen muss. Die Koordinatendarstellung schlüsselt das auf. Es werden zwei Hauptrichtungen definiert, mit jeweils einer Einheitslänge.

- Im Fall der Standardbasis ist der Weg: 4 Einheiten in Richtung **i** mit der Einheitslänge 1 und dann 3 Einheiten in Richtung **j** mit der Einheitslänge 1.
- In seiner Basis ist der Weg 1 Einheit in Richtung **m** mit der Einheitslänge 4 und dann 1 Einheit in der Richtung **n** mit der Einheitslänge 3.

Beides beschreibt einen gleich langen Weg.

3. Friedolin Schlaumeier hat sich etwas Seltsames ausgedacht:

Die Basis ist $\mathbf{p} = \binom{2}{1}$; $\mathbf{q} = \binom{1}{3}$.

Nun ist die Komponentendarstellung in dieser Basis zu finden.

$\mathbf{a} = a_p \cdot \mathbf{p} + a_q \cdot \mathbf{q}$. Und die Koordinatendarstellung des Vektors ist $\binom{a_p}{a_q}$.

Da Raten zu lange dauert, suchen wir eine Lösung über das vorhandene (lineare) Gleichungssystem.

Die Linearkombination muss **a** in der Standardbasis ergeben, wenn für **p** und **q** die Koordinatendarstellung in der Standardbasis eingesetzt wird.

$4 = a_p \cdot 2 + a_q \cdot 1$

$3 = a_p \cdot 1 + a_q \cdot 3$

Mit $a_p = 3 - 3 \cdot a_q$ und damit $4 = 6 - 6 \cdot a_q + a_q$ folgt $a_q = 2/5$ und $a_p = 9/5$.

In der Basis $\{\mathbf{p},\mathbf{q}\}$ ist also $\mathbf{a} = \binom{9/5}{2/5}$.

Wir kontrollieren wieder durch Zurückrechnung auf die kartesischen Koordinaten:

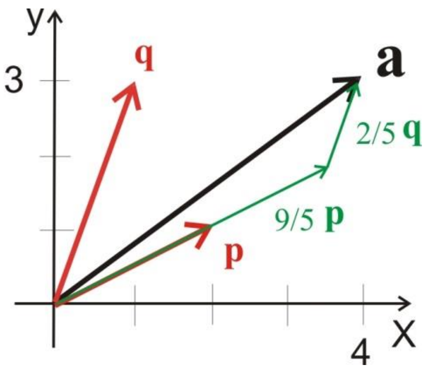
$$\mathbf{a} = 9/5 \cdot \binom{2}{1} + 2/5 \cdot \binom{1}{3} = \begin{pmatrix} 18 + 2/5 \\ 9 + 6/5 \end{pmatrix} = \binom{4}{3}$$

Obwohl die Koordinaten in dieser anderen Basis verschieden sind, folgen stets die gleichen Koordinaten in Bezug auf die Standardbasis und das kartesische Koordinatensystem.

Anschaulich ist der Weg jetzt
- 9/5 Einheitslängen in Richtung **p** und dann
- 2/5 Einheitslängen in Richtung **q**.

Der Zusammenhang mit der Standardbasis ist schwieriger, weil **p** und **q** schief relativ zu **i** und **j** liegen.

Auch dieser Weg führt zum gleichen Endpunkt, beschreibt also den Weg **a**.



(Wichtige) Anmerkung: Die Rechnung zum "schlauen Friedolin" zeigt, dass dies sicher kein eleganter Weg für die Verknüpfung verschiedener Basis-Systeme ist, vor allem wenn für mehrere Vektoren diese Umrechnung der Koordinaten erforderlich ist.

Die Umrechnung <Vektor in der Standardbasis> → <Vektor in der anderen Basis> erfordert deutlichen Rechenaufwand (Lineares Gleichungssystem; 3 Gleichungen für 3 Unbekannte).

Die in Anwendungen häufiger vorkommende Umrechnung <Vektor in der anderen Basis> → <Vektor in der Standardbasis> ist noch kurz.

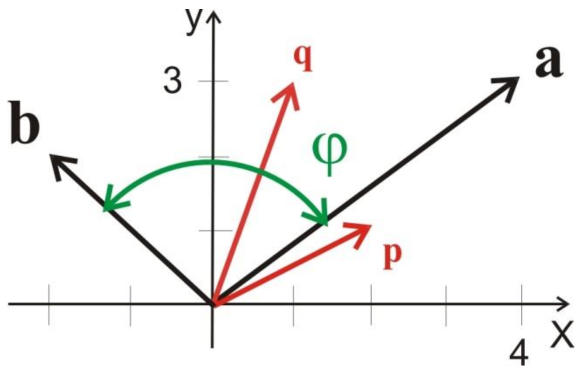
Sinnvoller wäre, sich einmal allgemein zu überlegen, wie diese "Basistransformation" geartet ist. Der Zusammenhang wird einmal für die Basisvektoren berechnet und dieses Ergebnis kann dann auf verschiedene Vektoren angewendet werden. Mit "Matrizen" ist dieses Verfahren zweckmäßig durchführbar!

Beispiel zum Skalarprodukt (und Betrag)

Zwei Vektoren
in der Basis {**p**,**q**}

a = $\begin{pmatrix} 9/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$, **b** = $\begin{pmatrix} -8/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$

Gesucht ist der Winkel φ zwischen **a** und **b**.



! Falls nur nach dem Winkel φ gefragt ist, ist ein sinnvoller Weg, zuerst in die Standardbasis umzurechnen und dann in dieser über das Skalarprodukt den Winkel zu berechnen!

Hier wollen wir absichtlich die unbequemere Rechnung in der gegebenen Basis durchführen!

Die Umrechnung in die Standardbasis ist trotzdem als Rechenkontrolle sinnvoll.

Vorarbeit - Rechnung in der **Standardbasis**:

Die Koordinaten von **a** in der Standardbasis sind schon bekannt. $\mathbf{a}_{St.Basis} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

b wird umgerechnet: $\mathbf{b}_{St.Basis} = -8/5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 6/5 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Damit weiter in der Standardbasis:

$|\mathbf{a}| = \sqrt{16+9} = 5$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = +8 + 6 = -2$;

$\cos(\varphi) = -2 / (5 \cdot \sqrt{8}) \approx -0{,}1414$; $\varphi \approx 98{,}13°$.

Nun beginnt die **eigentliche Arbeit -** die Rechnung in der Basis {**p**,**q**}!

Bekannt ist, dass wir für **a**·**b** die komplette Formel mit 4 Termen anwenden müssen. Darin kommen auch Produkte der Basisvektoren vor. Auch diese sind zu berechnen.

p·**p** = $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1}$ = 4 + 1 = 5

? Stimmt das wirklich? Hier wurde doch mit der "verkürzten" Formel gerechnet!

In dieser Rechnung werden die Koordinaten von **p** in der Standardbasis benutzt. Dass **p** ein Basisvektor der anderen Basis ist, spielt keine Rolle. Wichtig ist, dass die Koordinatendarstellung von **p** sich auf die Standardbasis bezieht.

? Stimmt auch das? Hinterher wird ja in der anderen Basis gerechnet!

Das Skalarprodukt ist eine Zahl (ein Skalar). Der Begriff der Basis ist für die Koordinatendarstellung der Vektoren wichtig, aber nicht für Zahlen, die wir damit berechnen.
Andere Begründung: Nach der Definition des Skalarprodukts (Länge1 · Länge2 · Winkel) kommen darin nur Größen vor, die von der Wahl einer Basis unabhängig sind. Die Länge eines Vektors ist als eindeutige Größe unabhängig von der Wahl der Basis, nur die Koordinaten sind davon betroffen.
Die restlichen Skalarprodukte der Basisvektoren:

q·**q** = $\binom{1}{3} \cdot \binom{1}{3}$ = 1 + 9 = 10; **p**·**q** = $\binom{2}{1} \cdot \binom{1}{3}$ = 2 + 3 = 5; (**q**·**p** = **p**·**q**)

a·**b** = a_p b_p **p**·**p** + a_q b_q **q**·**q** + a_p b_q **p**·**q** + a_q b_p **p**·**q**

$\binom{9/5}{2/5} \cdot \binom{-8/5}{6/5}$ = {(-72) · 5 + 12 · 10 +54 · 5 +(-16) · 5} / 25 = -2

Für die Berechnung von φ benötigen wird noch |**a**| und |**b**|.

"Also schnell": |**a**| = $\sqrt{81+4}$ / 5 ≈ 1,84

? Vorher war der Betrag doch 5? Warum stimmt jetzt die "Formel von Pythagoras" nicht mehr? Diese Formel hat doch nichts mit der Vektorrechnung zu tun!

Formel von Pythagoras? Wir erinnern uns: $a^2 + b^2 = c^2$. Wo sind hier Vektoren!

⇒ Diese Formel gilt in einem rechtwinkligen Dreieck!

Völlig äquivalent dazu ist eine geometrische Interpretation: Wir betrachten mit den Koordinaten Vielfache von Einheitsstrecken. Damit $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, müssen diese Einheitsstrecken die Länge 1 haben und senkrecht aufeinander stehen. Das ist dann die Standardbasis, und das verdeutlicht nochmals, dass man für Rechnungen Standardbasis und kartesische Koordinaten gar nicht präzise unterscheiden muss.

Also auch hier nochmals Skalarprodukte! $|\mathbf{a}|^2$ = **a**·**a**, weil φ = 0.

a·**a** = a_p a_p **p**·**p** + a_q q_q **q**·**q** + 2 a_p a_q **p**·**q**

$\binom{9/5}{2/5} \cdot \binom{9/5}{2/5}$ = {81 · 5 + 4 · 10 + 2 ·18 · 5} / 25 = 625 / 25 = 25 → |**a**| = 5

b·**b** = $\binom{-8/5}{6/5} \cdot \binom{-8/5}{6/5}$ = {64 · 5 + 36 · 10 + 2 ·(-48) · 5} / 25 = 200 / 25 = 8 → |**b**| = $\sqrt{8}$

Damit haben wir dieselben Werte wie oben (mit der Standardbasis) und erhalten auch denselben Winkel zwischen **a** und **b**.

Ergänzung: Orthonormal oder orthogonal?

Für Koordinaten in der Standardbasis gelten für das Skalarprodukt und den Betrag verkürzte Formeln. Die Standardbasis ist orthonormal. Gelten diese verkürzten Formeln auch für eine orthogonale Basis?

$\Rightarrow$ Es fallen auch bei der orthogonalen Basis die Terme mit Kreuzprodukten von Basisvektoren weg.
ABER: Die Terme mit Produkten gleicher Basisvektoren müssen nicht 1 sein. Nur bei der Orthonormalbasis sind diese 1 und tauchen damit in den Endformeln nicht mehr auf!

Beispiel (Basis von "Fritz", s.o.)

$\mathbf{m} = \begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$; $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$. Darin $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Falsch ist damit $|\mathbf{a}| = \{1^2 + 1^2\}^{1/2} = \sqrt{2}$.

$\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 16$; $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 9$; diese Produkte müssen berücksichtigt werden!

Damit richtig: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_m{}^2\ \mathbf{m}\cdot\mathbf{m} + a_n{}^2\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 9 = 25 \rightarrow |\mathbf{a}| = 5$. (also der richtige Betrag)

Bemerkung zum Vektorprodukt

Beim Skalarprodukt haben wir gesehen, dass eine nur orthogonale Basis und erst recht eine allgemeine Basis zu deutlich längeren Formeln führen. Beim Vektorprodukt wird die Sache noch dramatischer. Im allgemeinen Fall sind Kreuzprodukte nicht wieder ein anderer Basisvektor (wie in der Standardbasis z.B. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$). Die Entwicklung der Formeln für die allgemeine Basis ist nicht sinnvoll. Hier ist eine Transformation der Vektoren in die Standardbasis der sinnvolle Weg!

Übungen

1) Basis B in R^2: $\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$; $\mathbf{b_2} = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ (jeweils Koordinaten in der Standardbasis St)

   a) $\mathbf{a}$ in der Basis B: $\mathbf{a_B} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$. Gesucht $\mathbf{a}$ in der Standardbasis $\mathbf{a_{St}}$

   b) $\mathbf{c}$ in der Standardbasis: $\mathbf{c_{St}} = \begin{pmatrix}29\\-11\end{pmatrix}$. Gesucht $\mathbf{c}$ in der Basis B $\mathbf{c_B}$

1) a) $\mathbf{a_B} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = -2\ \mathbf{b_1} + 2\ \mathbf{b_2} = -2\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-22\end{pmatrix}$

   b) $\mathbf{c_{St}} = \begin{pmatrix}29\\-11\end{pmatrix} = 29\ \mathbf{i} - 11\ \mathbf{j} = 29\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

   Gesucht ist $\mathbf{c_B} = \begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix} = r\ \mathbf{b_1} + s\ \mathbf{b_2} = r\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$

   Lösen des Linearen Gleichungssystems für die Koordinaten

   $2r + 3s = 29 \quad 6r + 9s = 87$

   $6r - 5s = -11 \quad 6r - 5s = -11$

   $14s = 98 \rightarrow s = 7 \rightarrow 2r + 21 = 29 \rightarrow r = 4 \Rightarrow \mathbf{c_B} = \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$

2) Koordinatendarstellung eines Vektors in der Standardbasis und einer anderen Basis B:

$\mathbf{a_{St}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{a_B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

Basisvektor $\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ (Koordinaten in der Standardbasis); gesucht: $\mathbf{b_2}$

2) Alle Koordinaten werden in der Standardbasis ausgedrückt.

$\mathbf{a_B} = 6\,\mathbf{b_1} + 7\,\mathbf{b_2} = 6\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ muss gleich sein $\mathbf{a_{St}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ sein.

$18 + 7x = 4 \quad \rightarrow x = -2$

$-18 + 7y = 10 \quad \rightarrow y = 4$

$\Rightarrow \quad \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

3) Basis B: $\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$;

a) **a** in Basis B: $\mathbf{a_B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$; gesucht **a** in der Standardbasis, $\mathbf{a_{St}}$

b) **c** in der Standardbasis: $\mathbf{c_{St}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 30 \\ 3 \end{pmatrix}$; gesucht **c** in der Basis B, $\mathbf{c_B}$

3) a) Direktes Einsetzen; jeweils Koordinaten in der Standardbasis.

$$-2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -30 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbf{a_{St}}$$

b) Größerer Rechenaufwand; Lineares Gleichungssystem mit 3 Unbekannten

$$r\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 30 \\ 3 \end{pmatrix}$$

	r	s	t	(rechte Seite)	
[1]	2	3	-2	-5	
[2]	2	-1	2	15	
[3]	3	5	3	3	
----------					
[1]	2	3	-2	-5	
[2']	0	4	-4	-20	| = [1] - [2]
[3']	0	-1	-12	-21	| = 3·[1] - 2·[3]
----------					
[1]	2	3	-2	-5	
[2']	0	4	-4	-20	
[3"]	0	0	-52	-104	| = [2'] +4·[3']

$t = 2 \rightarrow 4s - 8 = -20 \rightarrow s = -3 \rightarrow 2r - 9 - 4 = -5 \rightarrow r = 4$

$\mathbf{c_B} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; Kontrolle: $4\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 30 \\ 3 \end{pmatrix}$ ☑