Vektoren - Basiswechsel - Matrix

1. Prinzip

Der Zusammenhang zwischen zwei Basissystemen sollen formal eleganter durchgeführt werden. Ein Nachteil des "einfachen" Verfahrens - siehe Seite V05 - ist, dass teilweise umständlich ein Lineares Gleichungssystem zu lösen ist

Hinweis 1: Nicht alle Autoren verwenden dieselbe Definition, welche Matrix wofür benutzt wird und welche Reihenfolge bei der Multiplikation vorkommt (von links oder von rechts). Eine genannte "Transformationsmatrix" sollte nicht einfach übernommen werden, sondern diese Definition muss beachtet werden.

Hinweis 2: Es kommt die Berechnung der inversen Matrix vor. Für eine 2x2-Matrix ist die manuelle Berechnung noch kurz. Wenn mit Zahlen gearbeitet wird, sollte man für eine 3x3-Matrix eher einen (besseren) Taschenrechner benutzen. Excel und Open Office enthalten auch diese Matrixinversion!

2. Verfahren

Es liegen zwei Basissystem $\{\mathbf{x_i}\}$ und $\{\mathbf{y_i}\}$ vor. Das sind jeweils 2 Basisvektoren in R^2 und 3 in R^3. Gegeben ist ein Vektor $\mathbf{v}$, der eine Koordinatendarstellung $\mathbf{v}^{(X)}$ und $\mathbf{v}^{(Y)}$ hat.

Ein Vektor hat verschiedene Koordinatendarstellungen, abhängig von der Basis. Aber es ist immer noch derselbe Vektor!

Eine Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ beschreibt den Zusammenhang zwischen den Basissystemen und den Koordinaten eines Vektors $\mathbf{v}$.

$$\{\mathbf{x_i}\}, \mathbf{v}^{(X)} \leftarrow \text{Matrix } \mathbf{T} \text{ (oder eine mit } \mathbf{T} \text{ verknüpfte Matrix)} \rightarrow \{\mathbf{y_i}\}, \mathbf{v}^{(Y)} \qquad \textbf{[1]}$$

Es folgt dann letztlich, dass die Spalten der Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ die Koordinaten der Basisvektoren $\mathbf{y_i}$ bezogen auf Basisvektoren $\mathbf{x_i}$ enthalten.

Die Summationen laufen in Folgenden alle von 1 bis n (= Dimension = Anzahl der Basisvektoren.)

Der Vektor $\mathbf{v}$ hat zwei verschiedene Koordinatendarstellungen als Linearkombination der jeweiligen Basisvektoren:

$$\mathbf{v}^{(x)} = x_1\,\mathbf{x_1} + x_2\,\mathbf{x_2} + \ldots = \sum_i x_i\,\mathbf{x_i} \qquad \textbf{[2a]}$$
$$\mathbf{v}^{(y)} = y_1\,\mathbf{y_1} + y_2\,\mathbf{y_2} + \ldots = \sum_i y_i\,\mathbf{y_i} \qquad \textbf{[2b]}$$

In R^2 wären dies als Beispiel die Vektoren $\mathbf{v}^{(X)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\mathbf{v}^{(Y)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Ein Basisvektor $\mathbf{y_i}$ hat Koordinaten, die sich auf das andere Basissystem $\mathbf{x_i}$ beziehen, er ist also eine Linearkombination der Basisvektoren $\mathbf{x_i}$. (Die Umkehrung gilt für $\mathbf{x_i}$ als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{y_i}$.)

Wir definieren einen Zusammenhang unter Verwendung der Matrix $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{y_i} = \sum_k t_{ki}\,\mathbf{x_k} \qquad \textbf{[3a]}$$

In R^3 könnte ein Beispiel dafür so aussehen:

$$\mathbf{y_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ - und das bedeutet } \mathbf{y_2} = 3\,\mathbf{x_1} - 2\,\mathbf{x_2} + 5\,\mathbf{x_3} \qquad \textbf{[3b]}$$

Eine Spalte i von $\mathbf{T}$ enthält die Koordinaten von $\mathbf{y_i}$ (= Koeffizienten der Linearkombination der Vektoren $\mathbf{x_k}$).

Eine mögliche Verständnisschwierigkeit kommt daher, dass wir gewohnt sind, Koordinaten immer auf die Standardbasis zu beziehen. Hier müssen wir genauer auf die Definition achten! Die erste Koordinate "3" bedeutet, dass die Komponente "3 mal Basisvektor $\mathbf{x_1}$" ist.

Jetzt wird [3] in [2b] eingesetzt:

$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(y)} = \quad = \sum_i y_i \, \mathbf{y_i}$ — $\mathbf{v}$ Entwicklung nach der Basis $\{\mathbf{y_i}\}$

$= \sum_i y_i \sum_k t_{ki} \, \mathbf{x_k}$ — Linearkombination für $\mathbf{y_i}$ eingesetzt

$= \sum_k \sum_i t_{ki} \, y_i \, \mathbf{x_k}$ — Umordnung

$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(x)} \quad = \sum_k \quad x_k \quad \mathbf{x_k}$ — $\mathbf{v}$ Entwicklung nach der Basis $\{\mathbf{x_i}\}$

Der Vergleich zeigt $x_k = \sum_i t_{ki} \; y_i$ **[4]**

Wenn die Koordinaten x_i und y_i als Spalten geschrieben werden, ist dies die Multiplikation der k-ten Zeile der Matrix **T** mit dem Vektor der Koordinaten von $\mathbf{v}^{(Y)}$.

Mit dem Spaltenvektor der Koordinaten von $\mathbf{v}^{(X)}$ und dem Spaltenvektor der Koordinaten von $\mathbf{v}^{(Y)}$ ist die Vektorgleichung für alle Koordinaten

$\mathbf{v}^{(X)} = \mathbf{T} \, \mathbf{v}^{(Y)}$. **[5]**

In der Definition [3a] für die Transformation der Basisvektoren ist im Produkt $\sum_k t_{ki} \, \mathbf{x_k}$ eine Spalte der Matrix **T** enthalten. (Erster Index läuft, zweiter Index fest). Die Spalte enthält die Koordinaten von $\mathbf{y_i}$. (Angabe, welche Koeffizienten die Linearkombination der $\mathbf{x_i}$ enthält.) Wird die Summation in eine Matrixoperation übersetzt, wird daraus eine Multiplikation "Zeile mal Matrix".

$(\mathbf{y_1} \ldots \mathbf{y_n}) = (\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_n}) \cdot \mathbf{T}$ **[6a]**

Unter Verwendung der transponierten Matrix **T'** lässt sich die gewohnte Art "Matrix mal Spalte" herstellen.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y_1} \\ \ldots \\ \mathbf{y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{T}' & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \ldots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix} \qquad \textbf{[6b]}$$

Prinzipiell besteht daher eine Wahlmöglichkeit, welche Variante benutzt werden soll. Zur Definition einer kürzeren Matrixgleichung werden als Vektoren $\mathbf{x_B}$ und $\mathbf{y_B}$ definiert.

$$\mathbf{x_B} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \ldots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{y_B} = \begin{pmatrix} \mathbf{y_1} \\ \ldots \\ \mathbf{y_n} \end{pmatrix} \qquad \textbf{[7]}$$

Diese Vektoren enthalten als Komponenten selbst wieder Vektoren (die Basisvektoren $\mathbf{x_1}$, ...)!

Damit sind [6a] und [6b] kompakter zu schreiben:

$\mathbf{y_B}' = \mathbf{x_B}' \, \mathbf{T}$ **[8a]**

$\mathbf{y_B} = \mathbf{T}' \, \mathbf{x_B}$ **[8b]**

Bemerkung: [8a] ist, zusammen mit [7] und [6a], die direkte Umsetzung der grundlegenden Definition des Zusammenhangs in [3a]. Der Zusammenhang [8b] mit [8a] ist auch formal zu verstehen. (Transponieren erzeugt aus einer 1-spaltigen Matrix - für einen "üblichen" Vektor als Spalte - eine 1-zeilige Matrix - für einen "Zeilenvektor".) $\mathbf{y_B}' = \mathbf{x_B}' \, \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{y_B}'' = \mathbf{y_B} = (\mathbf{x_B}' \, \mathbf{T})' = \mathbf{T}' \, \mathbf{x_B}'' = \mathbf{T}' \, \mathbf{x_B}$.

Die jeweils umgekehrten Transformationen werden mit der inversen Matrix $\mathbf{T}^{-1}$ bzw. $(\mathbf{T}')^{-1} = (\mathbf{T}^{-1})'$ durchgeführt.

Prinzipiell können in [8a] die Vektoren jeweils zu einer Matrix erweitert werden. Für $\mathbf{x_B}'$ und $\mathbf{y_B}'$ - mit jeweils 1 Zeile - entstehen so die Matrizen $\mathbf{X_B}$ und $\mathbf{Y_B}$ mit n Zeilen. 1 Spalte enthält dann die Koordinatendarstellung eines Vektors $\mathbf{x}_i$ bzw. $\mathbf{y_i}$.

Für $\mathbf{x_B}$ und $\mathbf{y_B}$ in [8b] wird die analoge Erweiterung spaltenweise durchgeführt.

Zur Veranschaulichung für [6a], [8a]: $\mathbf{y_B}' = \mathbf{x_B}'\,\mathbf{T}$

mit Vektoren $\mathbf{x_i}$, $\mathbf{y_i}$ $(\mathbf{y_1} \dots \mathbf{y_n}) = (\mathbf{x_1} \dots \mathbf{x_n}) \cdot \mathbf{T}$

mit Koordinaten $\begin{pmatrix} (\mathbf{y_1})_1 & \dots & (\mathbf{y_n})_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{y_1})_n & \dots & (\mathbf{y_n})_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x_1})_1 & \dots & (\mathbf{x_n})_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{x_1})_n & \dots & (\mathbf{x_n})_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$

Die Definition [3a], $\mathbf{y_i} = \sum_k t_{ki}\, \mathbf{x_k}$, ist damit erweitert zu $(\mathbf{y_i})_z = \sum_k t_{ki}\, (\mathbf{x_k})_z$.
Als Matrixgleichung: $\mathbf{Y_B} = \mathbf{X_B}\,\mathbf{T}$ **[9]**

Bei dieser Erweiterung ist aber eine exakte Überlegung, was die Koordinaten bedeuten, notwendig! Bei der Gleichung mit den Vektoren, $\mathbf{y_B}' = \mathbf{x_B}'\,\mathbf{T}$, ist die Situation eindeutig. Die Komponenten von $\mathbf{x_B}$ sind die Basisvektoren $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}$ und analog für $\mathbf{y_B}$. Wie ein $\mathbf{y_i}$ als Linearkombination von den $\mathbf{x_i}$ abhängt, ist in $\mathbf{T}$ enthalten. Wenn als Koordinaten von $\mathbf{y_i}$ auch diese Information benutzt wird, ist das nur redundant. ($\mathbf{Y_B} = \mathbf{T}$!)
Welche Koordinatendarstellung hat dann $\mathbf{x_i}$? Siehe dazu die Erklärung in Nr. 7!
$\mathbf{Y_B}$ und $\mathbf{X_B}$ müssen sich auf dieselbe Basis beziehen!
Wichtig wird die Matrixdarstellung nach [9], wenn für $\mathbf{x_i}$ und $\mathbf{y_i}$ Koordinatendarstellungen jeweils in einer dritten Basis angegeben werden.

Für die Koordinaten der Basisvektoren $\mathbf{x_i}$, $\mathbf{y_i}$ ist auch in Gebrauch, dass die Koordinaten sich jeweils auf ein drittes System beziehen. Im Regelfall ist das die Standardbasis. (In der bisher benutzten Erklärung haben sich die Koordinaten jeweils auf das andere der beiden Basissysteme bezogen.) Für den Zusammenhang der Vektoren $\mathbf{x_i} \leftrightarrow \mathbf{y_i}$ gilt immer noch [3a]. Am einfachsten ist dann Bestimmung von $\mathbf{T}$ mit zwei Matrizen $\mathbf{X_B}^{(3)}$ und $\mathbf{Y_B}^{(3)}$ für die Koordinaten der Basisvektoren $\mathbf{x_i}$ und $\mathbf{y_i}$ im System 3. Dabei werden die Vektoren $\mathbf{x_i}$, $\mathbf{y_i}$ spaltenweise angeordnet. (Spalte i enthält also zeilenweise die Koordinaten von $\mathbf{x_i}$ bzw. $\mathbf{y_i}$).

Dann ist $\mathbf{X_B}^{(3)}\,\mathbf{T} = \mathbf{Y_B}^{(3)}$ und damit $\mathbf{T} = (\mathbf{X_B}^{(3)})^{-1}\,\mathbf{Y_B}^{(3)}$. **[10]**

Die bisher benutzten Matrizen (mit Bezug auf das jeweils andere System) folgen aus

$\mathbf{X_B} = (\mathbf{Y_B}^{(3)})^{-1}\,\mathbf{X_B}^{(3)}$ und $\mathbf{Y_B} = (\mathbf{X_B}^{(3)})^{-1}\,\mathbf{Y_B}^{(3)}$ **[11]**

(Herleitung in allgemeiner Form unter 5.)

Zusammengefasst ist die Vorschrift:

- $\mathbf{x_B}$ Vektor der Basisvektoren $\mathbf{x_i}$
- $\mathbf{y_B}$ Vektor der Basisvektoren $\mathbf{y_i}$
- $\mathbf{v}^{(X)}$ Vektor der Koordinaten von $\mathbf{v}$ im System $\{\mathbf{x_i}\}$,
- $\mathbf{v}^{(Y)}$ Vektor der Koordinaten von $\mathbf{v}$ im System $\{\mathbf{y_i}\}$
- Die Matrix $\mathbf{T}$ enthält die Koordinaten der Basisvektoren $\mathbf{y_i}$ bezogen auf $\mathbf{x_i}$ als Spalten

Umwandlung von

von → nach	Basis		Vektorkoordinaten	
$x \to y$	$\mathbf{y_B}' = \mathbf{x_B}'\,\mathbf{T}$	$\mathbf{y_B} = \mathbf{T}'\,\mathbf{x_B}$	$\mathbf{v}^{(Y)} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{v}^{(X)}$	**[5]**
$y \to x$	$\mathbf{x_B}' = \mathbf{y_B}'\,\mathbf{T}^{-1}$	$\mathbf{x_B} = (\mathbf{T}^{-1})'\,\mathbf{y_B}$	$\mathbf{v}^{(X)} = \mathbf{T}\,\mathbf{v}^{(Y)}$	

Wenn die Koordinaten der Basisvektoren auf ein drittes System bezogen sind, wird $\mathbf{T}$ mit $\mathbf{T} = (\mathbf{X_B}^{(3)})^{-1}\,\mathbf{Y_B}^{(3)}$ berechnet. $\mathbf{X_B}^{(3)}$ und $\mathbf{Y_B}^{(3)}$ enthalten eine spaltenweise Anordnung der Koordinaten.

3. Beispiel 1 - R^2

Die Aufgabe wurde "auf normalem Weg" auf Seite V05 gelöst.

Basis B in R^2: $\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$; $\mathbf{b_2} = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ (jeweils Koordinaten in der Standardbasis St)

a) **a** in der Basis B: $\mathbf{a_B} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$. Gesucht **a** in der Standardbasis $\mathbf{a_{St}}$

b) **c** in der Standardbasis: $\mathbf{c_{St}} = \begin{pmatrix}29\\-11\end{pmatrix}$. Gesucht **c** in der Basis B $\mathbf{c_B}$

Zuordnung zur Anwendung der Matrixformeln:

- $\mathbf{b_1}$ und $\mathbf{b_2}$ entsprechen dann $\mathbf{y_1}$ und $\mathbf{y_2}$. (Diese Koordinaten kommen nach **T**)
- $\mathbf{a_B}$ entspricht dann $\mathbf{v^{(Y)}}$, $\mathbf{c_{St}}$ entspricht $\mathbf{v^{(X)}}$.

Transformationsmatrix $\mathbf{T} = \begin{pmatrix}2 & 3\\6 & -5\end{pmatrix}$; $\mathbf{T'} = \begin{pmatrix}2 & 6\\3 & -5\end{pmatrix}$

In R^2 kann $\mathbf{T}^{-1}$ "von Hand" berechnet werden: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\mathbf{A})}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$

$\mathbf{T}^{-1} = {}^1/_{-28}\begin{pmatrix}-5 & -3\\-6 & 2\end{pmatrix} = {}^1/_{28}\begin{pmatrix}5 & 3\\6 & -2\end{pmatrix}$

a) $\mathbf{v^{(Y)}} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$; gesucht $\mathbf{v^{(X)}}$ b) $\mathbf{v^{(X)}} = \begin{pmatrix}29\\-11\end{pmatrix}$; gesucht $\mathbf{v^{(Y)}}$

a) $\mathbf{v^{(X)}} = \mathbf{T}\,\mathbf{v^{(Y)}} = \begin{pmatrix}2 & 3\\6 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4+6\\-12-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-22\end{pmatrix}$

b) $\mathbf{v^{(Y)}} = \mathbf{T^{-1}}\,\mathbf{v^{(X)}} = {}^1/_{28}\begin{pmatrix}5 & 3\\6 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}29\\-11\end{pmatrix} = {}^1/_{28}\begin{pmatrix}145-33\\174+22\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$

4. Beispiel 2 - R^3

Die Aufgabe wurde "auf normalem Weg" auf Seite V05 gelöst.

Basis B: $\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{b_2} = \begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$; $\mathbf{b_3} = \begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$;

a) **a** in Basis B: $\mathbf{a_B} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$; gesucht **a** in der Standardbasis, $\mathbf{a_{St}}$

b) **c** in der Standardbasis: $\mathbf{c_{St}} = \begin{pmatrix}-5\\30\\3\end{pmatrix}$; gesucht **c** in der Basis B, $\mathbf{c_B}$

Zuordnung zur Anwendung der Matrixformeln:

- $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$ und $\mathbf{b_3}$ entsprechen $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$ und $\mathbf{y_3}$. (Diese Koordinaten kommen nach **T**)
- $\mathbf{a_B}$ entspricht dann $\mathbf{v^{(Y)}}$, $\mathbf{c_{St}}$ entspricht $\mathbf{v^{(X)}}$.

Transformationsmatrix $\mathbf{T} = \begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\4 & -2 & 4\\3 & 5 & 3\end{pmatrix}$; $\mathbf{T'} = \begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\3 & -2 & 5\\-2 & 4 & 3\end{pmatrix}$; $\mathbf{T^{-1}} = \frac{1}{104}\begin{pmatrix}26 & 19 & -8\\0 & -12 & 16\\-26 & 1 & 16\end{pmatrix}$

(Die inverse Matrix wird mit einem Programm berechnet. Wenn dieser Schritt "manuell" durchgeführt werden muss, ist der Aufwand nicht geringer als mit dem "normalen" Verfahren.)

a) $\mathbf{v^{(Y)}} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$; gesucht $\mathbf{v^{(X)}}$ b) $\mathbf{v^{(X)}} = \begin{pmatrix}-5\\30\\3\end{pmatrix}$; gesucht $\mathbf{v^{(Y)}}$

a) $\mathbf{v^{(X)}} = \mathbf{T}\,\mathbf{y} = \begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\4 & -2 & 4\\3 & 5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4+9+8\\-8-6-16\\-6+15-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-30\\-3\end{pmatrix}$

b) $\mathbf{v^{(Y)}} = \mathbf{T^{-1}}\,\mathbf{x} = \frac{1}{104}\begin{pmatrix}26 & 19 & -8\\0 & -12 & 16\\-26 & 1 & 16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\30\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{104}\begin{pmatrix}-130+570-24=416\\-360+48=-312\\130+30+48=208\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$

(Wenn $\mathbf{T}^{-1}$ bekannt ist, ist das schneller als die Lösung des Linearen Gleichungssystems. Der Vorteil ist groß, wenn mehrere Vektoren $\mathbf{v^{(X)}}$ zu transformieren sind.)

5. Allgemeine Herleitung von [10] und [11]

Allgemein: Bezug auf eine dritte Basis P.
Die Entwicklung der $\mathbf{x_i}$ in der Basis P ist:

$\mathbf{x_1} = x_{11}\,\mathbf{p_1} + x_{12}\,\mathbf{p_2} + \dots + x_{1n}\,\mathbf{p_n}$

$\mathbf{x_i} = x_{i1}\,\mathbf{p_1} + x_{i2}\,\mathbf{p_2} + \dots + x_{in}\,\mathbf{p_n}$

...

$\mathbf{x_n} = x_{n1}\,\mathbf{p_1} + x_{n2}\,\mathbf{p_2} + \dots + x_{nn}\,\mathbf{p_n}$

Als Matrixgleichung $(\mathbf{x_1} \dots \mathbf{x_n}) = (\mathbf{p_1} \dots \mathbf{p_n}) \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$

Mit den Zeilenvektoren $\mathbf{x_B}' = (\mathbf{x_1} \dots \mathbf{x_n})$ und $\mathbf{p}' = (\mathbf{p_1} \dots \mathbf{p_n})$ kürzer $\mathbf{x_B}' = \mathbf{p}'\,\mathbf{X_B}^{(P)}$

Die Matrix $\mathbf{X_B}^{(P)}$ enthält spaltenweise angeordnet die Entwicklung (Linearkombination) der Basisvektoren $\mathbf{x_i}$ in den Basisvektoren $\mathbf{p_i}$. Das sind die Koordinaten von $\mathbf{x_i}$ als Spalte i; die Koordinaten sind dann in den Zeilen dazu abzulesen.

Analog gilt für die Entwicklung der $\mathbf{y_i}$ in der Basis P:

$\mathbf{y_i} = y_{i1}\,\mathbf{p_1} + y_{i2}\,\mathbf{p_2} + \dots + y_{in}\,\mathbf{p_n}$

und schließlich $\mathbf{y_B}' = \mathbf{p}'\,\mathbf{Y_B}^{(P)}$

$\mathbf{Y_B}^{(P)}$ enthält spaltenweise die Entwicklung der $\mathbf{y_i}$ in $\mathbf{p_i}$.

Es gibt auch immer noch die Entwicklung nach dem jeweils anderen Basisvektor:

$\mathbf{x_i} = x_{i1}\,\mathbf{y_1} + x_{i2}\,\mathbf{y_2} + \dots + x_{in}\,\mathbf{y_n}$ und $\mathbf{y_i} = y_{i1}\,\mathbf{x_1} + x_{i2}\,\mathbf{x_2} + \dots + y_{in}\,\mathbf{x_n}$

In kurzer Form $\mathbf{x_B}' = \mathbf{y_B}'\,\mathbf{X_B}^{(Y)}$ und $\mathbf{y_B}' = \mathbf{x_B}'\,\mathbf{Y_B}^{(X)}$

Die Matrix $\mathbf{X_B}^{(Y)}$ enthält spaltenweise die Entwicklung der $\mathbf{x_i}$ in $\mathbf{y_i}$, die Matrix $\mathbf{Y_B}^{(X)}$ die Entwicklung der $\mathbf{y_i}$ in $\mathbf{x_i}$.

Nun der Zusammenhang zwischen den Darstellungen:

$\mathbf{x_B}' = \mathbf{p}'\,\mathbf{X_B}^{(P)} \Rightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{x_B}'\,(\mathbf{X_B}^{(P)})^{-1}$ eingesetzt in $\mathbf{y_B}' = \mathbf{p}'\,\mathbf{Y_B}^{(P)} \Rightarrow \mathbf{y_B}' = \mathbf{x_B}'\,(\mathbf{X_B}^{(P)})^{-1}\,\mathbf{Y_B}^{(P)}$

Verglichen mit $\mathbf{y_B}' = \mathbf{x_B}'\,\mathbf{Y_B}^{(X)}$ folgt $\mathbf{Y_B}^{(X)} = (\mathbf{X_B}^{(P)})^{-1}\,\mathbf{Y_B}^{(P)}$

Die Indizierung "(X)" lassen wir weg. Ohne weitere Angabe soll bei der Angabe von zwei Basissystemen der Bezug bei den Koordinaten jeweils auf das andere erfolgen. Vorher hatten wir den allgemeinen Bezug "(P)" als Bezug auf ein drittes System gekennzeichnet.

Dann ist $\mathbf{Y_B} = (\mathbf{X_B}^{(3)})^{-1}\,\mathbf{Y_B}^{(3)}$

Aus $\mathbf{y_B}' = \mathbf{p}'\,\mathbf{Y_B}^{(P)}$ folgt ebenso durch Vergleich mit $\mathbf{x_B}' = \mathbf{y_B}'\,\mathbf{X_B}^{(Y)}$ die Beziehung

$\mathbf{X_B}^{(Y)} = (\mathbf{Y_B}^{(P)})^{-1}\,\mathbf{X_B}^{(P)}$ und mit der anderen Indizierung $\mathbf{X_B} = (\mathbf{Y_B}^{(3)})^{-1}\,\mathbf{X_B}^{(3)}$

Die Formel für die Transformationsmatrix T ist aus diesen Resultaten unmittelbar abzulesen. Laut Definition enthält T spaltenweise die Koordinaten der Basisvektoren y_i bezogen auf x_i. Das ist die Matrix $\mathbf{Y_B}$. Daher $\mathbf{T} = \mathbf{Y_B} = (\mathbf{X_B}^{(3)})^{-1}\,\mathbf{Y_B}^{(3)}$

6. Beispiel 3 - R^2

Die Basisvektoren sind hier mit Koordinaten bezogen auf ein 3. Basissystem (= Standardbasis) angegeben.

Basis X: $\mathbf{x_1} = \binom{1}{4}$; $\mathbf{x_2} = \binom{3}{2}$; Basis Y: $\mathbf{y_1} = \binom{4}{-4}$; $\mathbf{y_2} = \binom{5}{-4}$

Vektor **v** in der Basis X: $\mathbf{v}^{(X)} = \binom{6}{-7}$

a) Gesucht: **v** in der Basis Y
b) Gesucht: **v** in der Standardbasis St - aus $\mathbf{v}^{(X)}$ und $\mathbf{v}^{(Y)}$
c) Kontrolle: Stimmt die Rücktransformation $\mathbf{v}^{(y)} \rightarrow \mathbf{v}^{(x)}$?
d) Wie löst man a) ohne den Matrixformalismus (wenn nur das Ergebnis interessiert)?
e) Zu überprüfen: Die Transformationsregeln gelten für die Basisvektoren
f) Abhängigkeit der Basisvektoren $\mathbf{x_i}$ von $\mathbf{y_i}$ (und umgekehrt) - "Berechnung" der entsprechenden Koordinaten
g) Überprüfung der Linearkombination von f) - durch Umrechnen in Koordinaten der Standardbasis
h) Überprüfung der Linearkombination von f) - durch Anwendung der Matrix-Transformationsformeln

a) Berechnung der Transformationsmatrix **T**

$\mathbf{X_B}^{(St)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{Y_B}^{(St)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

Anwendung von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det(A)}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$(\mathbf{X_B}^{(St)})^{-1} = {}^1/_{-10} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = {}^1/_{10} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Einsetzen: $\mathbf{T} = (\mathbf{X_B}^{(St)})^{-1}\, \mathbf{Y_B}^{(St)} = {}^1/_{10} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = {}^1/_{10} \begin{pmatrix} -20 & -22 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$

Berechnung: $\mathbf{T}^{-1} = 10 \cdot {}^1/_{-40} \begin{pmatrix} 24 & 22 \\ -20 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -11/2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

Transformation: $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -6 & -11/2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \binom{6}{-7} = \binom{-36 + 77/2}{30 - 35} = \binom{5/2}{-5}$

b) $\mathbf{v}^{(St)}$ aus $\mathbf{v}^{(X)}$: $\mathbf{v}^{(St)} = 6 \binom{1}{4} - 7 \binom{3}{2} = \binom{-15}{10}$

$\mathbf{v}^{(St)}$ aus $\mathbf{v}^{(Y)}$: $\mathbf{v}^{(St)} = {}^5/_2 \binom{4}{-4} - 5 \binom{5}{-4} = \binom{-15}{10}$

Die geforderte Gleichheit wird bestätigt.

c) Rücktransformation: $\mathbf{x} = \mathbf{T}\, \mathbf{y} = {}^1/_{10} \begin{pmatrix} -20 & -22 \\ 20 & 24 \end{pmatrix} \binom{5/2}{-5} = \binom{-5 + 11}{5 - 12} = \binom{6}{-7}$ ☑

d) Der Matrixformalismus wird hier benutzt, um die Anwendung der Formeln zu zeigen. Wenn nur das Ergebnis gefragt ist, ist ein direkter Weg viel einfacher!

$\mathbf{v}^{(St)}$ berechnet wie in b) aus $\mathbf{v}^{(X)}$. Dann $\mathbf{v}^{(Y)}$ aus $\mathbf{v}^{(St)}$.

$\mathbf{v}^{(Y)} = \binom{a}{b}$; $\binom{-15}{10} = a \binom{4}{-4} + b \binom{5}{-4}$

$4a + 5b = -15 \rightarrow 4a = -15 - 5b \rightarrow 10 = 15 + 5b - 4b \rightarrow b = -5 \rightarrow a = (-15 + 25)/4 = 5/2$

$\Rightarrow \mathbf{v}^{(Y)} = \binom{5/2}{-5}$

e) Der Zusammenhang zwischen den Basissystemen X und Y ist in der Matrix **T** enthalten. Mit den Zeilenvektoren gilt $(\mathbf{y_1} \ldots \mathbf{y_n}) = (\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_n}) \cdot \mathbf{T}$. Für die Matrixformulierung in Koordinaten wird anstelle der Vektoren jeweils die Koordinatendarstellung als Spalte eingesetzt. Daraus folgen die Matrizen $\mathbf{X_B}$ und $\mathbf{Y_B}$. Wenn in beiden Koordinatendarstellungen Bezug auf dieselbe 3. Basis genommen wird, müssen die Transformationsgleichungen auch erfüllt sein. $\mathbf{Y_B}^{(St)} = \mathbf{X_B}^{(St)}\, \mathbf{T}$ und $\mathbf{X_B}^{(St)} = \mathbf{Y_B}^{(St)}\, \mathbf{T}^{-1}$.

$\mathbf{Y_B}^{(St)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2{,}2 \\ 2 & 2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 & -2{,}2+7{,}2 \\ -8+4 & -8{,}8+4{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

$\mathbf{X_B}^{(St)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -5{,}5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24+25 & -22+25 \\ 24-20 & 22-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Die in a) definierten Matrizen folgen auch mit den Transformationsgleichungen.

f) Wie hängen die Basisvektoren $\mathbf{y_i}$ von den Basisvektoren $\mathbf{x_i}$ ab? Dazu ist keine Rechnung nötig! Die Matrix **T** wurde so erzeugt, dass die Spalten genau diese Abhängigkeit enthalten! Damit direkt: $\mathbf{y_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y_2} = \begin{pmatrix} -11/5 \\ 12/5 \end{pmatrix}$.

Mit $\mathbf{y_B} = \mathbf{x_B}\,\mathbf{T}$ gilt die Umkehrung $\mathbf{x_B} = \mathbf{y_B}\,\mathbf{T}^{-1}$. Die Abhängigkeit der Basisvektoren $\mathbf{x_i}$ von $\mathbf{y_i}$ wird durch $\mathbf{T}^{-1}$ beschrieben, in Koordinaten gelten dafür die Spalten der Matrix $\mathbf{T}^{-1}$.

Damit: $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} -11/2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

g) Weil $\mathbf{x_i}$ eine Linearkombination der $\mathbf{y_i}$ ist (und umgekehrt für $\mathbf{y_i}$) müssen die Darstellungen in der Standardbasis bei der Auflösung der Linearkombination entstehen.

$\mathbf{y_1} = -2\,\mathbf{x_1} + 2\,\mathbf{x_2} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ ☑

$\mathbf{y_2} = -11/5\,\mathbf{x_1} + 12/5\,\mathbf{x_2} = -11/5\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 12/5\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ ☑

$\mathbf{x_1} = -6\,\mathbf{y_1} + 5\,\mathbf{y_2} = -6\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ☑

$\mathbf{x_2} = -11/2\,\mathbf{y_1} + 5\,\mathbf{y_2} = -11/2\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☑

h) Transformationsformeln: $\mathbf{X_B} = (\mathbf{Y_B}^{(3)})^{-1}\,\mathbf{X_B}^{(3)}$, $\mathbf{Y_B} = (\mathbf{X_B}^{(3)})^{-1}\,\mathbf{Y_B}^{(3)}$

Basis "3" = "St"

$\mathbf{X_B}^{(St)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{Y_B}^{(St)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$; $(\mathbf{X_B}^{(St)})^{-1} = {}^1/_{10}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$(\mathbf{Y_B}^{(St)})^{-1} = {}^1/_4\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{X_B} = \begin{pmatrix} -1 & -5/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-5 & -3-5/2 \\ 1+4 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -11/2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ ☑

$\mathbf{Y_B} = {}^1/_{10}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = {}^1/_{10}\begin{pmatrix} -8-12 & -10-12 \\ 16+4 & 20+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -11/5 \\ 2 & 12/5 \end{pmatrix}$ ☑

Diese Rechnungen dienten nur zur Illustration der Formeln! $\mathbf{X_B}$ und $\mathbf{Y_B}$ können direkt aus T und $\mathbf{T}^{-1}$ abgelesen werden!

7. Falsche Anwendung von $\mathbf{Y_B} = \mathbf{X_B}\,\mathbf{T}$

(Für Zahlenwerte Nr. 6 benutzt)

Richtig ist $\mathbf{y_B}' = \mathbf{x_B}'\,\mathbf{T}$, $\mathbf{T} = {}^1/_{10}\begin{pmatrix} -20 & -22 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$

In 6. berechnet: $\mathbf{y_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y_2} = \begin{pmatrix} -11/5 \\ 12/5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} -11/2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Wir bilden daraus - nach Vorschrift - die Matrizen durch Anordnung der Vektoren in Spalten.

$\mathbf{Y_B} = \begin{pmatrix} -2 & -11/5 \\ 2 & 12/5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X_B} = \begin{pmatrix} -6 & -11/2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

Berechnung $\mathbf{X_B}\,\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -6 & -11/2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} {}^1/_{10}\begin{pmatrix} -20 & -22 \\ 20 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-11 & 132-132 \\ -10+10 & -11+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Also ein falsches Ergebnis!

Bei der Erweiterung von $\mathbf{y_B}' = \mathbf{x_B}'\ \mathbf{T}$ <u>müssen</u> in $\mathbf{Y_B}$ und $\mathbf{X_B}$ die Koordinaten auf dasselbe Basissystem bezogen werden! Wenn wir - unter Berücksichtigung der Vorschrift - $\mathbf{y_i}$ auf $\mathbf{x_i}$ beziehen, müssen wir auch $\mathbf{x_i}$ auf $\mathbf{x_i}$ beziehen! Das führt für $\mathbf{X_B}$ auf die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$. $\mathbf{Y_B} = \mathbf{E}\ \mathbf{T}$ gilt, weil $\mathbf{Y_B} = \mathbf{T}$ nach der Konstruktionsvorschrift für $\mathbf{T}$.

Nur für die richtige Wahl - beides Mal gleiche Basis für die Koordinaten - gilt $\mathbf{Y_B} = \mathbf{X_B}\ \mathbf{T}$ und $\mathbf{X_B}$ ist dann gleich $\mathbf{E}$.

Allgemein - zuerst "anschaulich": Wenn wir eine Abbildung $x \to y$ durchführen und dann eine Abbildung $y \to x$, kommen wir "an den Anfang zurück".

Allgemein - formal ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ seien Spaltenvektoren):

$\mathbf{x}$ als Linearkombination von $\mathbf{y}$: $\mathbf{x} = \mathbf{A}\ \mathbf{y}$ $\quad x_i = \sum_j a_{ij} y_j$

$\mathbf{y}$ als Linearkombination von $\mathbf{x}$: $\mathbf{y} = \mathrm{B}\ \mathbf{x}$ $\quad y_j = \sum_k b_{jk} x_k$

kombiniert: $\mathbf{x} = \mathbf{A}\ \mathbf{y} = \mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{x}$ $\quad x_i = \sum_j \sum_k a_{ij} b_{jk} x_k$

$\Rightarrow \mathbf{A}\ \mathbf{B} = \mathbf{E}$ $\quad \sum_j \sum_k a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik} = (\mathbf{E})_{ik}$

Das war auch das obige Resultat. $\mathbf{X_B}$ beschreibt die Linearkombination $\mathbf{x_i}$ von $\mathbf{y_i}$ und $\mathbf{T}$ die Umkehrung $\mathbf{y_i}$ von $\mathbf{x_i}$. Das Produkt muss $\mathbf{E}$ sein.

8. Kombination mehrerer Transformationen ("Kettenregel")

Mehrere aufeinanderfolgende Basistransformationen lassen sich auf eine gesamte Transformation zurückführen.

<u>Herleitung im Matrix-Formalismus</u> :

Die Beziehung $\mathbf{v}^{(X)} = \mathbf{T}\ \mathbf{v}^{(Y)}$ wird mehrfach angewandt. $\mathbf{T}$ ist - wie üblich - über die Verknüpfung der Basisvektoren $\mathbf{y_B}' = \mathbf{x_B}'\ \mathbf{T}$ definiert.

Um die Übersicht zu behalten, werden die beiden Basissysteme angegeben: $\mathbf{T}_{\mathrm{VON}}^{\mathrm{NACH}}$.

("X" entspricht dann "von" und "Y" entspricht "nach".)

$\mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$ beschreibt dann eine Transformation $\mathbf{v}^{(A)} = \mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\ \mathbf{v}^{(B)}$

$\mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$ enthält spaltenweise die Entwicklung der Basisvektoren von B im System A, also von "Nach" im System "Von".

! Die Basisvektoren und Vektoren in dieser Basis werden "entgegengesetzt" transformiert (kontragredient). Die hier gewählte Richtung <u>"von" → "nach" bezieht sich auf die Basisvektoren</u>, die neuen $\mathbf{y_i}$ entstehen durch Transformation aus den alten $\mathbf{x_i}$. Diese Vereinbarung wird in der Festlegung von $\mathbf{T}$ benutzt.

Wenn man die Transformation des Vektors lieber als "nach" aus "von" schreibt, also "nach" auf der linken Seite, ist die Inverse Matrix $\mathbf{T}^{-1}$ zu verwenden!

$\mathbf{v}^{(B)} = \left(\mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\right)^{-1} \mathbf{v}^{(A)}$

Eine weitere Transformation führt zur Basis C, ausgehend von B: $\mathbf{v}^{(B)} = \mathbf{T}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}\ \mathbf{v}^{(C)}$

$\mathbf{T}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}$ enthält nach der üblichen Vorschrift die Entwicklung der Basisvektoren von C im System B, also dem "direkten Vorgänger".

Die kombinierte Transformation ist $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$, $\mathbf{v}^{(A)} = \mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}}\ \mathbf{v}^{(C)}$

bekannt sind die Matrizen für $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ und $\mathrm{B} \to \mathrm{C}$.

$\mathbf{v}^{(A)} = \mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\ \mathbf{v}^{(B)} = \mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\ \mathbf{T}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}\ \mathbf{v}^{(C)}$ zeigt für die kombinierte Transformation ein Produkt.

Um dies zu verifizieren, noch eine weitere Transformation $\mathrm{C} \to \mathrm{D}$, $\mathbf{v}^{(C)} = \mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}}\ \mathbf{v}^{(D)}$

$\mathbf{v}^{(A)} = \mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\ \mathbf{v}^{(B)} = \mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\ \mathbf{T}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}\ \mathbf{v}^{(C)} = \mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\ \mathbf{T}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}\ \mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}}\ \mathbf{v}^{(D)}$

Ein Vergleich mit $\mathbf{v}^{(A)} = \mathbf{T}_A^D\ \mathbf{v}^{(D)}$ zeigt die "Kette": $\mathbf{T}_A^D = \mathbf{T}_A^B\ \mathbf{T}_B^C\ \mathbf{T}_C^D$
(Jeweils "Kürzen von links oben nach rechts unten" oder Erweitern mit aufeinanderfolgenden Transformationen.)

Herleitung über Summen:
(Nur für den Fall zweier kombinierter Transformationen durchgeführt.)

Vektor $\mathbf{v}$: $\quad \mathbf{v} = \sum_i v_i^A\ \mathbf{a_i} = \sum_i v_i^B\ \mathbf{b_i} = \sum_i v_i^C\ \mathbf{c_i}$ Entwicklung in A, B, C

Basis B: $\quad \mathbf{b_i} = \sum_k t_{ki}^B\ \mathbf{a_k}$ Matrix $\mathbf{T}_A^B$

Basis C: $\quad \mathbf{c_i} = \sum_k t_{ki}^C\ \mathbf{b_i}$ Matrix $\mathbf{T}_B^C$

$\mathbf{v} = \sum_i v_i^B\ \mathbf{b_i} = \sum_i v_i^B\ \sum_k t_{ki}^B\ \mathbf{a_k} = \sum_k \sum_i v_i^B\ t_{ki}^B\ \mathbf{a_k}$

$\mathbf{v} = \quad .\sum_k \quad v_k^A \quad \mathbf{a_k}$

Vergleich: $v_k^A = \sum_i t_{ki}^B\ v_i^B$

Dies ist die bekannte Beziehung $\mathbf{v}^{(A)} = \mathbf{T}\ \mathbf{v}^{(B)}$ - evtl. eindeutiger: $\mathbf{v}^{(A)} = \mathbf{T}_A^B\ \mathbf{v}^{(B)}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} = \sum_i v_i^C\ \mathbf{c_i} = \sum_i v_i^C\ \sum_k t_{ki}^C\ \mathbf{b_k} &= \sum_i v_i^C\ \sum_k t_{ki}^C\ \sum_m t_{mk}^B\ \mathbf{a_m} \\
&= \sum_m \left(\sum_i \sum_k t_{mk}^B t_{ki}^C v_i^C\right) \mathbf{a}_m \\
&= \sum_m \sum_i \left(\mathbf{T}_A^B \mathbf{T}_B^C\right)_{mi} v_i^C\ \mathbf{a_m} \\
&= \sum_m \left[\left(\mathbf{T}_A^B \mathbf{T}_B^C\right) \cdot \mathbf{v}^C\right]_m \mathbf{a_m} \\
\mathbf{v} &= \sum_m \quad v_m^A \quad \mathbf{a_m}
\end{aligned}
$$

Vergleich: $v_m^A = \left[\left(\mathbf{T}_A^B \mathbf{T_B^C}\right) \cdot \mathbf{v}^C\right]_m$

$\mathbf{v}^{(A)} = \mathbf{T}_A^C\ \mathbf{v}^{(C)}$ und $\mathbf{v}^{(A)} = \mathbf{T}_A^B\ \mathbf{T}_B^C\ \mathbf{v}^{(C)} \Rightarrow \mathbf{T}_A^C = \mathbf{T}_A^B\ \mathbf{T}_B^C$

Beispiel in R^2:

Start in der Basis A mit 2 Basisvektoren $\mathbf{a_1}$ und $\mathbf{a_2}$.
Ausgangspunkt muss also nicht immer die Standardbasis sein!
Für die nachfolgenden Basisvektoren sind immer die Koordinaten im Vorgänger, B in A, C in B, ... angegeben!

Basis B: $\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}_A^B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \to \left(\mathbf{T}_A^B\right)^{-1} = {}^1\!/_4 \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Basis C: $\mathbf{c_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{c_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \to \left(\mathbf{T}_B^C\right)^{-1} = {}^1\!/_{14} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Basis D: $\mathbf{d_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}_C^D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \to \left(\mathbf{T}_C^D\right)^{-1} = {}^1\!/_3 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

Vektor $\mathbf{v}$ in Basis A: $\mathbf{v}^{(A)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Direkte Transformationen $A \to B$, $B \to C$, $C \to D$:

Damit $\mathbf{v}$ in Basis B: $\mathbf{v}^{(B)} = \left(\mathbf{T}_A^B\right)^{-1} \mathbf{v}^{(A)} = {}^1\!/_4 \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

Damit $\mathbf{v}$ in Basis C: $\mathbf{v}^{(C)} = \left(\mathbf{T}_B^C\right)^{-1} \mathbf{v}^{(B)} = {}^1\!/_{14} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/14 \\ 3/28 \end{pmatrix}$

Damit v in Basis D: $\mathbf{v}^{(D)} = \left(\mathbf{T}_C^D\right)^{-1} \mathbf{v}^{(C)} = {}^1\!/_3 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/14 \\ 3/28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/84 \\ 1/21 \end{pmatrix}$

A → C (A → B → C in <u>einer</u> Matrix)

"Kette" $\mathbf{T}_A^C = \mathbf{T}_A^B\ \mathbf{T}_B^C$

Mit $(\mathbf{X}\ \mathbf{Y})^{-1} = \mathbf{Y}^{-1}\ \mathbf{X}^{-1}$: $\left(\mathbf{T}_A^C\right)^{-1} = \left(\mathbf{T}_B^C\right)^{-1} \left(\mathbf{T}_A^B\right)^{-1} = {}^1/_{14} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}^1/_4 \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$= {}^1/_{28} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$

$\mathbf{v}^{(\mathbf{C})} = \left(\mathbf{T}_A^C\right)^{-1} \mathbf{v}^{(\mathbf{A})} = {}^1/_{28} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/14 \\ 3/28 \end{pmatrix}$ ☑

D → A (D → C → B → A in <u>einer</u> Matrix)

$\mathbf{v}^{(\mathbf{A})} = \mathbf{T}_A^D\ \mathbf{v}^{(\mathbf{D})} = \mathbf{T}_A^B\ \mathbf{T}_B^C\ \mathbf{T}_C^D\ \mathbf{v}^{(\mathbf{D})}$

$\mathbf{T}_A^B\ \mathbf{T}_B^C\ \mathbf{T}_C^D = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 & -11 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 & -58 \\ 116 & 82 \end{pmatrix}$

$\mathbf{v}^{(\mathbf{A})} = \begin{pmatrix} -80 & -58 \\ 116 & 82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5/84 \\ 1/21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ☑

Wenn mehrere Vektoren transformiert werden müssten, kommt nur noch die Berechnung des letzten Produkts "Matrix · Vektor" vor! Rechenintensive Schritte müssen nur einmal durchgeführt werden. Das ist - neben der "formalen Eleganz" - ein entscheidender Vorteil.