Vektoren - Rechenregeln

Grundlegendes

- Vektoren lassen sich mit Operationen nur verknüpfen, wenn sie zum selben Vektorraum gehören. Das bedeutet, dass sie gleiche Dimension haben. Mit anderen Worten, sie müssen gleich viele Komponenten haben.
- Das Ergebnis einer Operation kann wieder ein Vektor sein, muss es aber nicht!
- Viele Regeln sind so, wie wir es von "normalen Zahlen" gewohnt sind. Neuartiges ist durch ➔ gekennzeichnet.
-

Regel	Fachbezeichnung oder Erklärung
Addition	
$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	kommutativ
$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$	assoziativ Die Klammern sind also überflüssig
$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$	Existenz eines Null-Elements (neutrales Element) Der Nullvektor **0** hat den Betrag 0. Der Nullvektor **0** hat keine Richtung.
$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$	Existenz eines Inversen (Damit Subtraktion = Addition des Inversen)

Multiplikation mit einem Skalar

$r\,(s\,\mathbf{a}) = (r\,s)\,\mathbf{a}$	Assoziativ Formale Gründe: Die Multiplikation Skalar · Vektor und die Multiplikation Skalar · Skalar, also Zahl · Zahl, sind etwas Verschiedenes.
$r\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = r\,\mathbf{a} + r\,\mathbf{b}$	distributiv (für die Addition von Vektoren)
$r\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{a} = (r + s)\,\mathbf{a}$	distributiv (für die Addition von Skalaren)

Skalarprodukt

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$	kommutativ
$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$	distributiv
$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$	distributiv
$(r\,\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = r\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$	assoziativ
$\mathbf{a}\cdot(r\,\mathbf{b}) = r\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$	
➔ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$	bedeutet nicht, dass $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ und/oder $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ sein muss orthogonale Vektoren, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, haben auch $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ Bei Zahlen muss r und/oder s Null sein, damit $r\,s = 0$

Vektorprodukt

NUR in R^3 - also immer 3 Komponenten!

➔ $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = - \mathbf{a} \times \mathbf{b}$	antikommutativ
$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$	Die Klammer ist eigentlich überflüssig $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ ist unmöglich, weil $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ein Skalar ist und "Skalar x Vektor" nicht definiert ist.
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$	distributiv
$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$	
$(r\,\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = r\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$	
$\mathbf{a} \times (r\,\mathbf{b}) = r\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$	
➔ $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$	Nicht assoziativ! $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{a}$ $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c}$
➔ $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$	Nullvektor bei kollinearen Vektoren!

Dreifaches Produkt (Spatprodukt)

$[\mathbf{abc}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$	Beachte: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ ist unmöglich, s.o.
$[\mathbf{abc}] = [\mathbf{bca}] = [\mathbf{cab}]$	zyklische Vertauschung
$= - [\mathbf{acb}] = - [\mathbf{bac}] = - [\mathbf{cba}]$	antizyklische Vertauschung