Berechnung von Determinanten

Determinanten sind eine quadratische Anordnung mit einer Berechnungsvorschrift für 1 Ergebnis daraus. Wir benötigen nur den Fall 2 x 2 und 3 x 3. Für den Fall 2 x 2 gibt es nur eine eindeutige Vorschrift. Für den Fall 3 x 3 ist die Rechenarbeit etwas größer. Zwei Wege sind in Gebrauch.

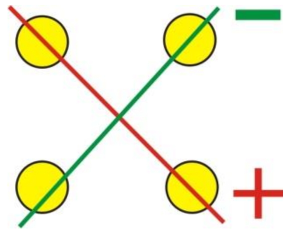
2 x 2

Für das Schema D = $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ ist D = $a_1\, b_2 - b_1\, a_2$

Grafisch kann man so darstellen :

Entlang der Diagonalen werden die Elemente multipliziert.

Dann wird die Summe aus diesen Produkten gebildet:
+ für die Hauptdiagonale
- für die Nebendiagonale



Für diesen Fall, 2 x 2, scheint die grafische Darstellung übertrieben. Wir sehen aber gleich, dass dasselbe Prinzip auch im Fall 3 x 3 benutzt wird!

Hier können wir Zeilen und Spalten vertauschen, die Determinante ist die gleiche. Auch hier gilt wieder, dass wir in gleicher Weise bei 3 x 3 die Anordnung vertauschen können! <u>Alle</u> drei Zeilen sind dann drei Spalten und umgekehrt.

Beispiel:

D = $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$ = 2 · (-5) - 4 · 3 = -22

3 x 3

Die erste Möglichkeit wäre, eine "Endformel" anzugeben. Machen wir nicht!

Eine Vertauschung <u>aller</u> Zeilen und Spalten ist möglich. 1. Zeile ↔ 1.Spalte <u>und</u> 2. Zeile ↔ 2.Spalte <u>und</u> 3. Zeile ↔ 3.Spalte.

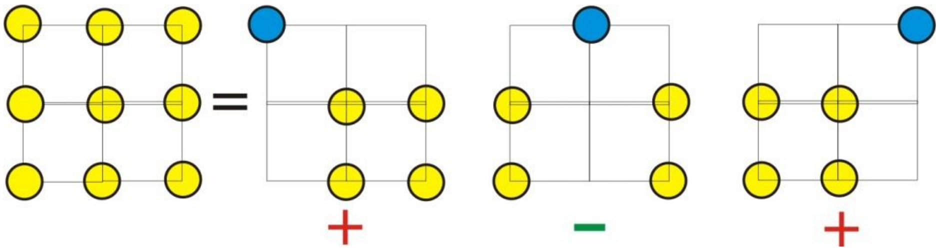
Eine **nützlich**e Eigenschaft: Sind zwei Zeilen (oder Spalten) gleich, ist die Determinante 0.

Eine gute Möglichkeit ist die "**Entwicklung**". (Hier spaltenweise durchgeführt, zeilenweise führt zum gleichen Resultat.) Man wählt nacheinander ein Element der ersten Zeile aus und multipliziert das mit dem 2 x 2 Rest, der sog. "Streichungsdeterminante" oder "Unterdeterminante". Diese drei Summanden werden kombiniert, ungeradzahlige Spalten (1. und 3.) werden addiert, geradzahlige (2.) subtrahiert.

Hinweis: Dieser Entwicklungssatz gilt auch für n x n Determinanten, n > 3!

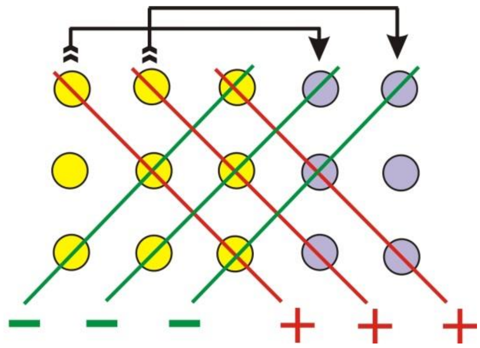
Formale Definition: Wenn in einer n x n Determinante zu einem Element a_{ij} die i-Zeile und j-te Spalte gestrichen werden, entsteht eine (n-1) x (n-1) Unterdeterminante. Wenn diese noch mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+j}$ multipliziert wird, nennt man das algebraisches Komplement oder Adjunkte A_{ij}. Entwicklung nach einer Zeile i: $D = a_{i1}\, A_{i1} + a_{i2}\, A_{i2} + \ldots + a_{in}\, A_{in}$.

Grafisch für eine 3 x 3 Determinante - Entwicklung nach der 1. Zeile



Jeweils 1 Element der ersten Zeile · 2 x 2 Unterdeterminante
Diese 3 Produkte mit dem angegebenen ± Vorzeichen zusammengefasst

Eine andere Möglichkeit ist die Berechnung mit einem Schema nach **Sarrus**. Die Summanden werden kombiniert, für die "Hauptdiagonalen" +, für die "Nebendiagonalen" -.



Die quadratische Anordnung wird rechts um nochmal die erste und zweite Spalte ergänzt. (Spalten 1 → 4 und 2 → 5)

Jeweils 3 diagonal stehende Elemente werden multipliziert.

Die drei Produkte entlang der "Hauptdiagonale" werden addiert.

Die drei Produkte entlang der "Nebendiagonale" werden subtrahiert.

Hinweis: Weitere Manipulationen sind an Determinanten möglich. Dabei müssen aber Regeln beachtet werden! Beispielsweise ändert eine Vertauschung von zwei Zeilen das Vorzeichen der Determinante. (Vorher wurde zugelassen: Alle Zeilen und Spalten werden vertauscht.)

Beispiele

1. Vergleich

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (+)\,2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 3 \cdot (-42) + 4 \cdot (-35) = -20$$

In diesem Fall wäre die Vertauschung Zeilen / Spalten von Vorteil!
(Bei der Entwicklung fällt ein Term weg.)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix} = (+)\,2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) + 7 \cdot (-2) = -20$$

Das Sarrus-Schema führt hier zu größerem Rechenaufwand.

2	3	4	2	3	(+) 90 + 126 + 0 - 140 - 96 - 0 = -20
0	5	6	0	5	
7	8	9	7	8	

<u>2.</u> Sonderfälle erkennen!

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (+)\ 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$$

Schneller: 2 gleiche Zeilen, also D = 0

<u>3.</u> Kreuzprodukt von Vektoren

Die erste Zeile enthält Buchstaben, die zwei weiteren enthalten Zahlen (Koordinaten der Vektoren).

! Mit mathematischer Strenge betrachtet, ist diese Konstruktion nicht erlaubt. Die erste Zeile enthält Vektoren, die anderen Zeilen enthalten Zahlen. Bei präziser Definition müssen alle Zeilen Elemente gleicher Art enthalten.
Als "**Berechnungsschema**" ist aber diese Struktur trotzdem gut geeignet!

Entwicklung:

$$D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (+)\ \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot (-3) - \mathbf{j} \cdot (-6) + \mathbf{k} \cdot (-3)$$

$$= -3\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$$

Sarrus:

Ich schreibe die Buchstaben der ersten Zeile rechts noch einmal hin, um die Zuordnung der einzelnen Produkt-Terme zu erleichtern.

i	**j**	**k**	**i**	**j**	**i**: 21 - 24 = -3
2	3	4	2	3	**j**: 20 - 14 = 6
5	6	7	5	6	**k**: 12 - 15 = -3 $\rightarrow$ -3 **i** + 6 **j** - 3 **k**