Lineares Gleichungssystem

Zur Lösung sind **Umformungen** erlaubt:

- Ändern der Reihenfolge der Zeilen
- Addition einer Zeile zu einer anderen
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl (außer 0)

Zweckmäßige **Lösungsstrategie**:

- Durch Umformungen wird eine Dreiecksform erzeugt. Dann folgt schrittweise die Bestimmung der Lösung. Man nennt das auch "Gauß'sches Eliminationsverfahren".
- Zur Verringerung der Schreibarbeit wird mit den Koeffizienten gearbeitet!
- Ein erkannter Faktor für eine Zeile wird gekürzt!

Als **Sonderfälle** sind möglich:

- Es gibt keine Lösung. Die Zeilen enthalten dann einen Widerspruch.
- Es gibt unendlich viele Lösungen. Die Lösung enthält dann einen freien Parameter.

Ein Gleichungssystem mit 2 Variablen wird nicht behandelt. Hier ist auch das einfache "Substitutionsverfahren" gut. (Eine Variable aus einer Zeile isolieren und das Ergebnis in die andere einsetzen.)

Beispiel 1a (Lösung existiert)

[1]	2 x + 4 y + 6 z = 14	3 Lineare Gleichungen für 3 Unbekannte
[2]	3 x + 5 y - 7 z = -17	
[3]	4 x + 3 y - 2 z = 3	

----

	x	y	z	(rechts)	Diese Überschrift erleichtert die Übersicht
[1]	1	2	3	22	Faktor 2 erkannt, daher gekürzt
[2]	3	5	-7	-17	
[3]	4	3	-2	3	

-------------------------------- Wiederholtes Anschreiben aller Zeilen erleichtert die Übersicht

[1]	1	2	3	22	
[2']	0	1	16	83	| = 3 · [1] - [2]
[3']	0	5	14	85	| = 4 · [1] - [3]

----

[1]	1	2	3	22	
[2']	0	1	16	83	
[3"]	0	0	66	330	| = 5 · [2'] - [3']

-------------------------------- Jetzt ist die Dreiecksform erreicht

Abarbeiten von unten her:

- Aus [3"]: $66\,z = 330 \rightarrow z = 5$
- Eingesetzt in [2']: $y + 16 \cdot 5 = 83 \rightarrow y = 3$
- Eingesetzt in [1]: $x + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 22 \rightarrow x = 1$

Lösungsmenge L = {x, y, z} = {1, 3, 5}

Beispiel 1b $\rightarrow$ **Beachten: Eventuell Umordnung nötig!**

[1] $2z = 12$ — 3 Lineare Gleichungen für 3 Unbekannte

[2] $3x + 4y - 5z = -8$

[3] $5x + 4y - 3z = 8$

Das <u>Sinnvollste</u> ist hier wohl, das unmittelbar erkennbare "z = 6" zu verwenden und dann 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten zu lösen!

Die <u>formale</u> Anwendung des Schemas zeigt den Fehler an:

	x	y	z		
[1]	0	0	2	12	
[2]	3	4	-5	-8	☹
[3]	5	4	-3	8	☹

Es ist unmöglich, durch Umformungen für Zeile [2] und [3] - unter Verwendung der Zeile [1] - den 1. Schritt der Stufenform "0 * * *" zu erzeugen.

Durch <u>andere</u> <u>Sortierung</u> der Zeilen ist die Aufgabe sofort lösbar:

	x	y	z		
[1]	5	4	-3	8	
[2]	3	4	-5	-8	
[3]	0	0	1	6	| gewünschte Stufenform liegt schon vor! ☺

----

[1]	5	4	-3	8	
[2']	0	-8	16	64	| = 3 · [1] - 5 · [2] (Kürzen wäre noch möglich)
[3]	0	0	1	6	

Aus [3]: z = 6 $\rightarrow$ in [2']: $8y = 16 \cdot 6 - 64 \rightarrow y = 4 \rightarrow$ in [1]: $5x = 8 - 4 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \rightarrow x = 2$

L = {x, y, z} = {2, 4, 6}

Beispiel 2a (Lösung mit freiem Parameter)

[1] $2x + 4y + 6z = 14$ — (Zeile 1 und 2 wie bei Beispiel 1)

[2] $3x + 5y - 7z = -17$

[3] $5x + 9y - z = 27$ — (Zeile 3 neu)

----

	x	y	z		
[1]	1	2	3	22	Faktor 2 gekürzt
[2]	3	5	-7	-17	
[3]	5	9	-1	27	

-------------------------------- Wiederholtes Anschreiben aller Zeilen erleichtert die Übersicht

[1]	1	2	3	22	
[2']	0	1	16	83	| = 3 · [1] - [2]
[3']	0	1	16	83	| = 5 · [1] - [3]

-------------------------------- **Zeile [2'] und Zeile [3'] identisch!**

[1]	1	2	3	22	
[2']	0	1	16	83	
[3'']	0	0	0	0	| = [2'] - [3']

-------------------------------- **In [3'']: "0·x + 0·y + 0·z = 0 = 0"!**

Man kann die Erzeugung der Dreiecksform beenden, wenn 2 gleiche Zeilen erkannt werden, oder bis zum Ende, der Zeile "0 = 0", fortsetzen.

2 Gleichungen für 3 Unbekannte: Die Lösung enthält einen freien Parameter. Damit gibt es "unendlich viele" Lösungen.

Beispiel: Sei z = t. → Aus [2']: y = 83 - 16 t → In [1]: x = 22 - 3 t - 2 (83 - 16 t) = -144 + 29 t

Lösungsmenge L = {x, y, z} = {29 t - 144, 22 - 3 t, t}

Beispiel 2b (Lösung mit 2 freien Parametern)

[1] 2 x + 4 y + 6 z = 44
[2] 1 x + 2 y + 3 z = 22
[3] -6 x -12 y - 18 z = -132

-------------------------------- **Vielleicht erkennt man schon hier die Lineare Abhängigkeit!**

	x	y	z		
[1]	1	2	3	22	Faktor 2 gekürzt
[2]	1	2	3	22	
[3]	1	2	3	22	Faktor -6 gekürzt

-------------------------------- **3 identische Zeilen!**

[1]	1	2	3	22	
[2']	0	0	0	0	| = [1] - [2]
[3']	0	0	0	0	| = [1] - [3]

-------------------------------- **2 Zeilen "0·x + 0·y + 0·z = 0 = 0"!**

Man kann die Erzeugung der Dreiecksform beenden, wenn gleiche Zeilen erkannt werden, oder bis zum Ende, den Zeilen "0 = 0", fortsetzen.

1 Gleichung für 3 Unbekannte: Die Lösung enthält zwei freie Parameter.

Beispiel: Sei y = s und z = t. → Aus [1]: x = 22 - 2 s - 3 t
Lösungsmenge L = {x, y, z} = {22 - 2 s - 3 t, s, t}

Beispiel 3a (keine Lösung, Widerspruch)

[1] 3 x + 6 y + 9 z = 66
[2] 3 x + 5 y - 7 z = -17
[3] 5 x + 9 y - 1 = 7

----

	x	y	z		
[1]	1	2	3	22	Faktor 3gekürzt
[2]	3	5	-7	-17	
[3]	5	9	-1	7	Faktor -6 gekürzt

----

[1]	1	2	3	22	
[2']	0	1	16	83	| = 3 · [1] - [2]
[3']	0	1	16	103	| = 5 · [1] - [3]

-------------------------------- **Widerspruch schon erkennbar!**

[1]	1	2	3	22	
[2']	0	1	16	83	
[3'']	0	0	0	-20	| = [2'] - [3']

-------------------------------- **Widerspruch "0·x + 0·y + 0·z = 0 = -20"!**

Man kann die Erzeugung der Dreiecksform beenden, wenn ein Widerspruch erkannt wird, oder bis zum Ende, der Zeile "0 = Zahl (≠ 0)", fortsetzen.

Es gibt keine Lösung, die alle drei Gleichungszeilen erfüllt. (Auch ein freier Parameter würde nichts daran ändern, dass in [2'] und [3'] ein Widerspruch vorliegt!)

Lösungsmenge L = {x, y, z} = { }

Ein Dreieckschema mit 2 Widerspruchszeilen bedeutet auch L = { }.
"Zweimal falsch ist auch falsch!"

1	2	3	22		1	2	3	22		
1	2	3	23	→	0	0	0	-1	→	"0 = -1"
1	2	3	24		0	0	0	-2	→	"0 = -2"

Anmerkungen

- Mit dem Dreiecksschema kann man erkennen, welche Art von Lösung vorliegt (eine, keine, unendlich viele) und kann eine Lösung bestimmen.
- Wenn nur die Art der Lösung interessiert, ist dies mit einer Determinante untersuchbar: Die Determinante der Koeffizienten (linke Seite) muss $\neq 0$ sein, damit 1 Lösung existiert. Dies ist äquivalent zur Aussage, dass die Zeilen der linken Seite linear unabhängig sind.
- Von der allgemeinen Theorie her wichtig und wenn wieder nur die Art der Lösung interessiert, ist eine Untersuchung des Rangs möglich. Der Rang gibt an, wie viele linear unabhängige Zeilen vorkommen. Wenn der Rang der gesamten Zeilen (linke + rechte Seite) und der Rang der linken Seite gleich und gleich der Anzahl der Unbekannten, n, sind, dann existiert 1 Lösung. Wenn diese beiden Ränge gleich, aber < n sind, dann gibt es unendlich viele Lösungen. Wenn der Rang (linke Seite) < Rang (linke + rechte Seite) ist, dann gibt es keine Lösung.
- Bei unterbestimmten Gleichungssystemen - weniger Zeilen als Unbekannte - sind nur Lösungen mit freien Parametern möglich.
- Bei überbestimmten Gleichungssysstemen - mehr Zeilen als Unbekannte - müssen die zusätzlichen Zeilen mit den notwendigen verträglich sein, damit eine Lösung existiert. Im Dreieckschema entstehen dann "0 = 0" Zeilen.

$2x + 3y = 3$	2	3	3		2	3	3		2	3	3		
$3x + 2y = 7$	3	2	7	→	0	5	-5	→	0	5	-5		
$5x + 5y = 10$	5	5	10		0	5	-5		0	0	0		
$5x - 5y = 20$	5	-5	20		0	25	-25		0	0	0	→	y = -1, x = 3

Hier ist es aber einfacher, aus 2 Zeilen eine Lösung zu finden und zu kontrollieren, ob diese Lösung auch die restlichen Zeilen erfüllt!