Lineares Gleichungssystem - Vertiefung

Die Lösung Linearer Gleichungssysteme ist das "Gauß'sche Eliminationsverfahren" gut geeignet - schon erklärt unter Z02. Alternativ kann mit einem Matrixformalismus gelöst werden.

1. Motivation

Vertieft ist die "Lösungsmannigfaltigkeit" oder "Lösungsstruktur" interessant - mit anderen Worten, welche Arten von Lösungen auftreten können. Ebenso ist für 2 oder 3 Unbekannte eine anschauliche, geometrische Deutung der möglichen Fälle interessant. Es besteht auch ein direkter Zusammenhang mit der linearen Abhängigkeit von Vektoren.

Das wird hier im Detail am Fall zweier Unbekannter diskutiert.

3 mögliche Gleichungssyteme

S-1	**S-2**	**S-3**
$2x + 3y = 4$	$2x + 3y = 4$	$2x + 3y = 4$
$4x + 5y = 6$	$4x + 6y = 8$	$4x + 6y = 10$
→ Lösung	→ Lösung	→ keine Lösung
($x = -1$, $y= 2$)	mit 1 freiem Parameter	Widerspruch

2. Geometrische Deutung (2 Unbekannte, 2 Gleichungen)

Die Gleichungen beschreiben in einem (kartesischen) Koordinatensystem Geraden. Dann wird erkennbar:

- S-1 Zwei Geraden mit einem Schnittpunkt
- S-2 Zwei identische Geraden
- S-3 Zwei parallele Geraden

Die Lösung des Gleichungssystem ist damit **äquivalent** der **Suche nach einem Schnittpunkt** zweier Geraden.

- S-1 Es gibt einen Schnittpunkt
- S-2 Es gibt keinen eindeutigen Schnittpunkt. Oder: Formal ist jeder Punkt auf den beiden Geraden auch ein "Schnittpunkt".
- S-3 Es gibt keinen Schnittpunkt

3. Deutung als Beziehung zwischen Mengen

Nur theoretisch interessant.

1 der beiden Gleichungen definiert jeweils eine Menge von Zahlenpaaren, verknüpft über die Bedingung der Gleichung. Beide Gleichungen zusammen definieren eine **Schnittmenge**. (Durchschnitt)

- S-1 Die Schnittmenge besteht aus 1 Zahlenpaar {x,y}
- S-2 Die Schnittmenge ist eine unechte Teilmenge
  In beiden Richtungen ist jedes Element der Teilmenge auch in der anderen Obermenge enthalten.
- S-3 Die Schnittmenge ist die Leere Menge
  Beiden Mengen haben kein gemeinsames Element.

4. Matrixformalismus (2 Unbekannte, 2 Gleichungen)

Das Gleichungssystem kann auch anders formuliert werden.

➔ **A x = c**

A: Matrix der Koeffizienten der linken Seite

x: Spaltenvektor der Unbekannten

y: Spaltenvektor der rechten Seite

Die Lösung ist sofort anzugeben: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{c}$

In der Durchführung muss die inverse Matrix A^{-1} berechnet werden; damit ergibt sich praktisch kein Vorteil gegenüber dem direkten Weg (Gauß'sches Eliminationsverfahren).

Beispiel **S-1**:

2x + 3y = 4
4x + 5y = 6

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Auf direktem Weg wurde als Lösung gefunden: x = -1, y= 2

Kontrolle: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+9=-1 \\ 4-6=-2 \end{pmatrix}$

Beispiel **S-2** und **S-3**:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ - dafür können wir **keine Inverse** bilden!

$\mathbf{A}^{-1}$ existiert nur, falls die Determinante nicht verschwindet!

Hier ist det(**A**) = $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ = 12 - 12 = 0

Die verschwindende Determinante det(**A**) liefert also den Hinweis, dass <u>keine</u> Lösung existiert. Welcher der beiden Fälle, S-2 oder S-3, vorliegt ist damit nicht zu entscheiden.

HINWEIS: Offenkundig muss der Formalismus noch erweitert werden! (... kommt natürlich noch!)

5. Lineare Abhängigkeit (2 Unbekannte, 2 Gleichungen)

Die Untersuchung, ob die Zeilen des Linearen Gleichungssystems voneinander abhängen, liefert ein eindeutiges Kriterium für die Lösungsmannigfaltigkeit.

Die Entscheidung über det(**A**) ist als Teil auch darin enthalten!

Wir betrachten als erstes das System S-1 {2x + 3y = 4 / 4x + 5y = 6}.

Es gibt keine Möglichkeit, die 2. Zeile aus der 1. Zeile durch Multiplikation mit einem Faktor zu erzeugen.

Im Gegensatz dazu ist im System S-2 {2x + 3y = 4 / 4x + 6y = 8} die 2. Zeile das doppelte der 1. Zeile.

Im System S-3 {2x + 3y = 4 / 4x + 6y = 10} kann die 2. Zeile wieder nicht aus der 1. erzeugt werden. ABER: Der linke Teil allein ist das Doppelte, "(4x + 6y) = 2·(2x + 3y)".

→ Offenkundig bestehen 3 Möglichkeiten, wie die Zeilen (oder nur die linke Seite) linear abhängig sind!

→ Dies wird besser mit Matrizen formuliert, weil es "unzweckmäßig" ist, die kompletten Zeilen mit den Unbekannten anzuschreiben. Es kommt ja nur auf die Koeffizienten an!

→ Zusätzlich wird der **Rang einer Matrix** eingeführt. Das ist die Anzahl linear <u>un</u>abhängiger Zeilen. Damit wird angegeben, <u>ob</u> Zeilen linear abhängig sind.
<u>Wie</u> die Zeilen linear abhängig sind, ist dafür nicht von Interesse.
Zur Bestimmung des Rangs wird mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren eine Stufenmatrix erzeugt. Die Anzahl von Zeilen ungleich 0 ist dann der Rang.
Der Rechenaufwand damit gleich wie beim üblichen Lösungsverfahren!

→ Für die Klassifikation der Lösungsmöglichkeiten ist auch noch die Anzahl der Unbekannten wichtig (= n). Im Moment haben wir n = 2. Im Moment liegen auch jeweils 2 Zeilen im Gleichungssystem vor, der Rang der Matrizen kann also maximal 2 sein.

	Gleichungssystem	Matrix für linke Seite "Koeffizientenmatrix"	Matrix für linke + rechte Seite "erweiterte Matrix"
(S-1)	$2x + 3y = 4$ $4x + 5y = 6$	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\mathbf{A}\vert\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
(S-2)	$2x + 3y = 4$ $4x + 6y = 8$	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\mathbf{A}\vert\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$
(S-3)	$2x + 3y = 4$ $4x + 6y = 10$	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\mathbf{A}\vert\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

S-1: n = 2; rang(**A**) = 2; rang(**A**|**c**) = 2 1 Lösung
S-2: n = 2; rang(**A**) = 1; rang(**A**|**c**) = 1 1 freier Parameter, ∞ Lösungen
S-3: n = 2; rang(**A**) = 1; rang(**A**|**c**) = 2 keine Lösung

Im Fall "Anzahl der Gleichungen = Anzahl der Unbekannten" ist die Matrix **A** quadratisch. Dann ist die Entscheidung "Ist rang(**A**) = n" auch über eine Determinante möglich. Falls lineare Abhängigkeit besteht, enthält die Determinante im allgemeinen Fall (mindestens) eine Zeile, die aus den restlichen durch eine Linearkombination erzeugt werden kann. In diesem Fall ist die Determinante det(**A**) = 0. "rang(**A**) < n" ist damit äquivalent zu "det(**A**) = 0". Die Fälle S-2 und S-3 können mit "det(**A**) = 0" nicht unterschieden werden, die Analyse über die Ränge ermöglicht aber die Unterscheidung!

Die hier im Beispiel gezeigte Regel gilt allgemein - auch für den Fall "Anzahl der Gleichungen ≠ Anzahl der Unbekannten"!

> n = Anzahl der Unbekannten
> rang(**A**) = rang(**A**|**c**) = n ⇒ 1 Lösung
> rang(**A**) = rang(**A**|**c**) < n ⇒ ∞ Lösungen (freie Parameter)
> rang(**A**) ≠ rang(**A**|**c**) ⇒ keine Lösung

Eine weitere Einsicht liefert die spaltenweise Betrachtung der eingeführten Matrizen.
(Dies hängt mit dem theoretischen Begriff "Vektorraum" zusammen.)

Im Fall S-1 mit einer eindeutigen Lösung.

$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{c} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Eine Linearkombination der Spalten von **A** liefert dann **c**, wenn die Koeffizienten die Lösung für x und y sind:

$x\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = ? \rightarrow (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 6 \\ -4 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Es gibt nur 1 Möglichkeit für den Lösungsvektor **x** um **c** durch eine Linearkombination zu erhalten.

Im Fall S-2 enthält die Lösung des Gleichungssystems einen freien Parameter. Ein mögliche Lösung ist x = 2 - (3/2) t, y = t.

Es ist $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{c} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-(3/2)\,t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Es gibt ∞ Möglichkeiten für den Lösungsvektor **x** um **c** durch eine Linearkombination zu erhalten.

$x\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = ? \rightarrow [\,2 - (3/2)\,t\,]\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3t+3t \\ 8-6t+6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Im Fall S-3 gibt es keine Lösung, das Gleichungssystem enthält einen Widerspruch.

$x\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = ? \rightarrow$ Es gibt kein {x, y} um $\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ als Linearkombination zu erhalten.

Mit x = 2 - (3/2) t, y = t erhalten wir $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$,

mit x = (5/2) - (3/2) t, y = t erhalten wir $[\,(5/2) - (3/2)\,t\,]\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3t+3t \\ 10-6t+6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Jeweils nur eine der beiden Koordinaten der rechten Seite wird erhalten.

Damit können die Spalten-Ränge von **A** und **A|c** verglichen werden. Es folgen dann dieselben Resultate wie vorher bei der Untersuchung der linearen Abhängigkeit der Zeilen.

Es gilt <u>allgemein</u>, dass der Spaltenrang gleich dem Zeilenrang ist!

Für S-2 mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{A|c} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ ist

rang(**A**) = 1 - nur 1 linear unabhängige Spalte - und

rang(**A|c**) = 1 - die letzte Spalte ist auch linear abhängig, z.B. Spalte 3 = zweimal Spalte 1

Für S-3 mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{A|c} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ ist

rang(**A**) = 1 und

rang(**A|c**) = 2 - die 3. Spalte ist keine Linearkombination der 1. und 2.

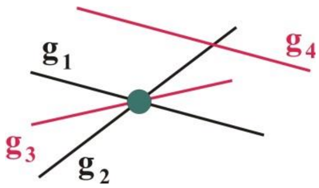
6. Unter- und überbestimmte Gleichungssysteme

Es sei stets n = 2, 2 Unbekannte {x,y}.

0 Gleichungen: Trivialer Fall, alle Zahlen (in R^2) sind möglich.

1 Gleichung: Es gibt nur 1 Bedingung zwischen x und y, damit ∞ Lösungen mit 1 freiem Parameter.

>2 Gleichungen:
Die überzähligen Gleichungen können zu den bisherigen passen oder auch nicht.



g_1 und g_2 sollen eine Lösung liefern, es liegt ein Schnittpunkt vor.

- Eine weitere Gerade g_3 kann dann auch durch den Schnittpunkt verlaufen; die vorhandene Lösung wird somit bestätigt. Ebenso wird durch eine weitere Gerade, die identisch zu g_1 oder g_2 ist, die Lösung bestätigt.
- Eine andere weitere Gerade g_4 geht nicht durch den Schnittpunkt; in der Skizze hätten dann g_2 und g_4 eine Lösung, aber g_1 hat nicht diese Lösung.

Die Anwendung des Kriteriums "det(**A**) = ?" ist nicht mehr möglich, weil keine quadratische Matrix vorliegt!

Die Klassifikation über Ränge ist möglich!

Beispiel 1

2x + 3y = 4

4x + 5y = 6

8x + 9y = 10

Dazu Dreiecksformen für **A** und **A|c**:

A	2	3		2	3			2	3		
	4	5		0	1		| 2·[1]-[2]	0	1		
	8	9		0	3		| 4·[1]-[3]	0	0		| 3·[2']-[3']
A|c	2	3	4	2	3	4		2	3	4	
	4	5	6	0	1	2	| 2·[1]-[2]	0	1	2	
	8	9	10	0	3	6	| 4·[1]-[3]	0	0	0	| 3·[2']-[3']

rang(**A**) = rang(**A|c**) = 2 = n

Es gibt 1 Lösung.

Zeile 3 ist eine Linearkombination von Zeile 1 und Zeile 2, liefert also weder etwas Neues noch einen Widerspruch. [3] = 3·[2] - 2·[1]

Beispiel 2

2x + 3y = 4

4x + 5y = 6

8x + 9y = 12

Dreiecksformen für **A** gleich wie vorher, Dreiecksform für **A|c**:

A|c	2	3	4	2	3	4		2	3	4	
	4	5	6	0	1	2	| 2·[1]-[2]	0	1	2	
	8	9	12	0	3	4	| 4·[1]-[3]	0	0	2	| 3·[2']-[3']

Im "üblichen" Verfahren schließen wir aus der letzten Zeile: "Widerspruch 0=2", also keine Lösung.

Mit Rängen: rang(**A**) = 2 und rang(**A|c**) = 3 ≠ rang(**A**), also "keine Lösung".

➔ Dazu noch Weiteres in 7.!

Beispiel 3

2x + 3y = 4

4x + 6y = 8

10x + 15y = 20

Dazu Dreiecksformen für **A** und **A|c**:

A	2	3		2	3		
	4	6		0	0		| 2·[1]-[2]
	10	15		0	0		| 5·[1]-[3]
A|c	2	3	4	2	3	4	
	4	6	8	0	0	0	| 2·[1]-[2]
	10	15	20	0	0	0	| 5·[1]-[3]

Im "üblichen" Verfahren schließen wir aus den zwei Nullzeilen: Nur die erste Zeile liefert eine Bedingung. Weil darin zwei Unbekannte vorliegen, muss 1 freier Parameter gewählt werden.

Mit Rängen: rang(**A**) = 1 und rang(**A|c**) = 1 und beide Ränge < n (=2)

⇒ ∞ Lösungen (1 freier Parameter), z.B. {x,y} = { 2 - (3/2) t, t }.

7. Überbestimmte Gleichungssysteme und Lineare Abhängigkeit.

Zum Verständnis - Rang der erweiterten Matrix

♦ In 6. - Beispiel 2 haben wir einen Rang 3 für ein Problem in R^2 gefunden. Ist das nicht ein Widerspruch? Rang 3 bedeutet "3 linear unabhängige Vektoren". In R^2 soll es aber nur 2 linear unabhängige Vektoren geben!

➔ Weil kaum anzunehmen ist, dass sich alle Mathematiker geirrt haben, müssen wir irgendwo einen Denkfehler machen! Der Denkfehler ist, dass wir Vektoren und Geraden verwechseln.

Wir betrachten Systeme mit jeweils 5 Zeilen. (Angegeben wird jeweils die Matrix **A|c**.)

1) Als erstes ein "problemloser Fall".

$$\mathbf{A|c} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \\ 8 & 12 & 16 \\ 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

Zeilen 2 bis 5 sind jeweils ein Vielfaches der 1. Zeile. Es gibt damit nur 1 linear unabhängige Zeile. Es ist daher auch (verständlich) rang(**A**) = 1 und rang(**A|c**) = 1

2) Nun wird die rechte Seite verändert. Wir wählen Primzahlen. Damit liegen 5 "verschiedene Zeilen" vor.

$$\mathbf{A|c} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 6 & 9 & 11 \\ 8 & 12 & 13 \\ 10 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Sofort einsichtig ist rang(**A**) = 1. Es liegt dieselbe Situation wie vorher vor!

Ist nun rang(**A|c**) = 5 - "weil 5 verschiedene Zeilen"?

Von den Spalten aus gesehen, ist die 2. Spalte auch in der erweiterten Matrix ein Vielfaches der 1. Spalte. Es liegen nur 2 linear unabhängige Spalten vor und rang(**A|c**) = 2!

Es muss daher auch innerhalb der Zeilen eine lineare Abhängigkeit bestehen, die nur "mit einem Blick" nicht sofort erkennbar ist! (Es gilt "Zeilenrang = Spaltenrang = Rang"!)

Zeile 3 - 5, als Abhängigkeit von Zeilen 1, 2:

Z3 = 2 Z2 - Z1; Z4 = 2 Z1 + Z2; Z5 = Z1 + 2 Z2.

Allgemein kann für das Gleichungssystem mit 2 Variablen rang(**A|c**) maximal 3 sein, weil 3 Spalten vorliegen. Für mehr als 3 Zeilen muss dann auf jeden Fall lineare Abhängigkeit vorliegen.

3) Bisher hatten wir parallele Geraden. Nun sei in Zeile 2 eine zu Zeile 1 senkrechte Gerade eingesetzt.

$$\mathbf{A|c} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \\ 6 & 9 & 11 \\ 8 & 12 & 13 \\ 10 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

rang(**A**) = 2. Es liegen zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Geraden vor.

rang(**A|c**) = 3. Wenn Zeile 1, 2, 3 als linear unabhängig gewählt werden, müssen die restlichen Zeilen wieder linear abhängig sein!

Z4 = (5/2) Z1 + (1/2) Z3; Z5 = 2 Z1 + Z3.

<u>4)</u> Nun noch 5 nicht parallele Geraden

$$\mathbf{A}|\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ -9 & 8 & -7 \\ -6 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

rang(**A**) = 2. Wie theoretisch gefordert, gibt es nur 2 linear unabhängige Vektoren in R^2.
Für die linke Seite, Matrix **A**:
Z3 = 2 Z2 - Z1; Z4 = (77/3) Z1 - (26/3) Z2; Z5 = (50/3) Z1 - (17/3) Z2.
rang(**A|c**) = 3. Die erweiterte Matrix hat 3 linear unabhängige Zeilen.
Weil Zeilen 1,2,3 linear abhängig sind (Z3 = 2 Z2 - Z1), müssen Z4, 5 nicht von diesen allein linear abhängig sein. (Eine Möglichkeit ist Z5 = 5/8 Z1 - 1/4 Z2 + 5/8 Z4.)
Obwohl das Gleichungssystem als Suche nach einem Schnittpunkt von Geraden in R^2 interpretiert werden kann, sind in der erweiterten Koeffizientenmatrix 3 linear unabhängige Zeilen möglich. Die Zeilenvektoren dieser Matrix sind 3-dimensional.
Anschaulich sind für Geraden in R^2 nur 2 linear unabhängige Richtungsvektoren möglich. Die Richtung einer dritten Geraden hängt von den beiden anderen ab. Die gesamte Gerade muss aber nicht aus den zwei anderen Geraden durch Kombination erzeugt werden können.

<u>Verständnisfrage - Unterschied Vektor / Gerade:</u>

♦ Wir definieren in R^2 eine Basis - korrekt mit 2 linear unabhängigen Vektoren. Dann müsste jeder 3. Vektor in R^2 eine Linearkombination dieser beiden Basisvektoren sein. Als "unsere Anwendung" wählen wir 2 lineare Gleichungen für zwei senkrecht aufeinander stehende Geraden. Das ist dann wohl sicher linear unabhängig. Eine 3. lineare Gleichung muss dann also eine Linearkombination der beiden ersten Gleichungen sein. Wir finden aber keine!
➔ Der Denkfehler ist wieder die Verwechslung von Gerade und Vektor. Mit 2 orthogonalen Vektoren als Basis können wir jeden anderen Vektor durch Linearkombination erzeugen. Anschaulich können wir mit den zwei Richtungen des Koordinatensystems auch jeden Punkt in R^2 erreichen. Aber eine dritte Gerade, die schräg zu unseren beiden senkrecht stehenden Geraden liegt, kann durch keine Kombination aus diesen beiden erzeugt werden!

<u>Verständnisfrage - Rang:</u>

♦ Lineares Gleichungssystem für n Unbekannte.
a) Welcher Rang rang(**A|c**) muss vorliegen, damit wir <u>sicher</u> sein können, dass <u>jede</u> <u>beliebige</u> weitere Zeile durch eine Linearkombination der bisherigen darstellbar ist? (In der Linearkombination müssen natürlich nicht immer alle bisherigen Zeilen vorkommen!)
b) Gibt es dann eine Bedingung, welche Werte rang(**A**) besitzen kann oder muss?
➔ a) Für n Unbekannte gibt es maximal n linear unabhängige Vektoren. rang(**A**) ist damit maximal n, und rang(**A|c**) maximal n+1. Für den Rang n+1 muss jede weitere Zeile linear abhängig sein.
➔ b) rang(**A|c**) = n+1. Die Matrix **A** hat dann eine Spalte weniger. rang(**A**) ist um 1 geringer, also rang(A) = n, wenn die weitere Spalte den Rang erhöht hat. Wenn die weitere Spalte linear abhängig war, ändert sich durch die Wegnahme die lineare Abhängigkeit der restlichen Spalten nicht, bleibt also auch n. rang(A) < n ist nicht möglich, weil dann noch eine weitere Zeile möglich ist, die linear unabhängig ist.

Beispiel

Sei n = 2

1. Sei rang(**A**|**c**) = n = 2

   A|**c** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ → rang(**A**) = 2, rang(**A**|**c**) = 2

   Mit einer weiteren Zeile bleibt rang(**A**) = 2

   A|**c** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ → rang(**A**|**c**) = 2; keine Rangerhöhung, weil linear abhängig

   A|**c** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$ → rang(**A**|**c**) = 3; Rangerhöhung, weil linear unabhängig

   Für rang(**A**|**c**) = n = 2 können wir <u>nicht</u> <u>siche</u>r sein, dass die weitere Zeile linear abhängig ist, also als Linearkombination des bisherigen Zeilen darstellbar ist.

2. Sei rang(**A**|**c**) = n+1 = 3

   A|**c** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$ → rang (**A**) = 2, rang(**A**|**c**) = 3

   Mit einer weiteren Zeile bleibt rang(**A**|**c**)=3 (rang(**A**) bleibt 2 ist trivial)

   A|**c** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \\ x & x & x \end{pmatrix}$

   Unabhängig davon, was als x eingesetzt wird, ist die neue Zeile linear abhängig. Umständlich erkennbar durch Reduktion auf Dreiecksform, einfach durch die Überlegung, dass immer noch 3 Spalten vorliegen, sich also der Spaltenrang - und damit der Rang - nicht ändert.

   Kann in diesem Fall rang(**A**) < n sein? Wenn der Rang < n ist, kann eine weitere linear unabhängige Zeile noch dazu gefügt werden, und damit ist die Aufgabenstellung verletzt. Oder: Wegnahme einer Spalte kann den Rang nur um 1 reduzieren.

Verständnisfrage- Rang:

♦ Ist es möglich, dass rang(**A**) > rang(**A**|**c**)?

➔ Am Einfachsten: Eine bestehende lineare Unabhängigkeit kann nicht durch Hinzufügen einer weiteren Spalte entfernt werden. Es gilt also stets rang(**A**) ≤ rang(**A**|**c**).

Ergänzung: Überbestimmte Gleichungssysteme in der Praxis

Überbestimmte Gleichungssysteme im bisherigen Sinn sind in der Praxis, z.B. der Auswertung experimenteller Daten, weniger bedeutend. Dort ist ein anderer Gesichtspunkt wichtig! 1 Gleichung liefert 1 Information - je mehr Gleichungen, desto mehr Informationen! Man löst dann das System mit einer "Ausgleichsrechnung", in der Regel nach der "Methode der kleinsten Quadratsumme" (Gauß).

Beispiel: Ein Spektrum charakterisiert eine chemische Substanz. Wenn ein Gemisch mehrere Substanzen enthält, ist das resultierende Spektrum eine Überlagerung (= Summe, also eine lineare Beziehung) der Einzelspektren. Um die Anteile der einzelnen Substanzen im Gemisch zu erhalten, misst man bei (möglichst) vielen Wellenlängen. Damit liegen (möglichst) viele lineare Gleichungen vor. Dann wird in der Ausgleichsrechnung die "beste" Übereinstimmung gesucht. (Bestmögliche Übereinstimmung mit <u>allen</u> Gleichungen; keine Einzelgleichung ist dann im Regelfall völlig erfüllt.). Von den vorher genannten Kriterien überlebt nur die Forderung, dass man für n Substanzen bei mindestens n verschiedenen Wellenlängen messen muss.