Lineares Gleichungssystem - n = 3

1. Problemstellung

Für 2 Unbekannte ist das Gleichungssystem geometrisch äquivalent der Suche nach einem Schnittpunkt zweier Geraden in R^2. Für 3 Unbekannte ist das Äquivalent die Suche nach einem Schnittpunkt dreier Ebenen in R^3. Für n = 2 gab es nur 3 Möglichkeiten: a) die Geraden schneiden sich, b) sind parallel, c) sind äquivalent. Für n = 3 gibt es 1 Möglichkeit für 1 gemeinsamen Punkt, den Schnittpunkt. Die Lösung des Linearen Gleichungssystems enthält dann keinen Parameter. Es gibt 1 Möglichkeit, dass 3 Ebenen identisch sind. Dazu kommt eine Reihe anderer Situation, zwei parallele Ebenen, verschiedene Schnittgeraden, usw.

2. Allgemein gültige Entscheidung

n = Anzahl der Unbekannten
$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = n \quad \Rightarrow$ 1 Lösung
$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) < n \quad \Rightarrow \infty$ Lösungen (freie Parameter)
$\text{rang}(\mathbf{A}) \neq \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) \quad \Rightarrow$ keine Lösung

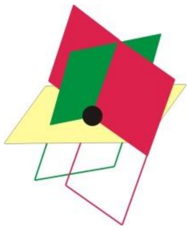
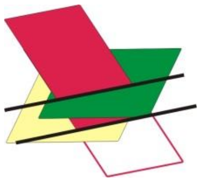
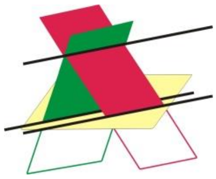
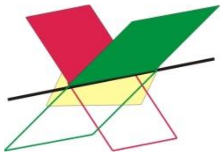
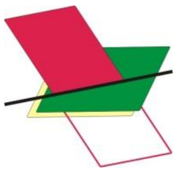
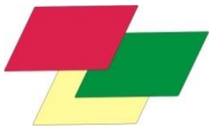
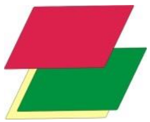
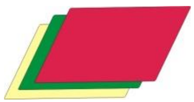
"Lösung" bedeutet geometrisch Schnittpunkt. Damit ist vor einer detaillierten Angabe klar, dass "1 Lösung" einem Schnittpunkt der 3 Ebenen entspricht, "∞ Lösungen" Schnittgerade oder identische Ebene bedeuten muss und unter "keine Lösung" die parallele Ebene vorkommen muss.

Die verschiedenen geometrischen Möglichkeiten werden konkret gezeigt und mit jeweils einem Zahlenbeispiel vorgerechnet.

Welche Ränge sind bei überbestimmten Gleichungssystemen - entsprechend mehr als drei Ebenen - möglich?
$\rightarrow$ Der Rang der Koeffizientenmatrix ist maximal 3. Es liegen 3 Spalten vor. Damit ist der Spaltenrang maximal 3. Für mehr als 3 Zeilen ist daher der Zeilenrang auch maximal 3. (Rang = Spaltenrang = Zeilenrang!) Es liegt lineare Abhängigkeit vor, die nur "mit einem Blick" nicht mehr einfach zu erkennen ist.
$\rightarrow$ Der Rang der erweiteren Matrix ist maximal 4. Es liegen 4 Spalten vor. Auch hier muss für mehr als 4 Zeilen eine lineare Abhängigkeit bestehen.
$\rightarrow$ Eine vorhandene Lösung (gleiche Ränge) kann durch eine weitere Zeile verschwinden, aber nicht neu durch eine weitere Zeile entstehen.

Die geometrischen Situationen bei überbestimmten Gleichungssystemen enthalten Kombinationen der 8 Grundtypen des Systems mit 3 Zeilen.

3. Detaillierte Entscheidung (3 Gleichungen, also 3 Ebenen)

Fall	rang(**A**)	rang(**A**|**c**)	geometrisch (Lage Ebenen)	
1	3	3	3 verschieden → 1 Schnittpunkt	
2A	2	3	2 parallel, 3. schneidet → 2 parallele Schnittgeraden	
2B	2	3	3 verschieden →3 verschiedene Schnittgeraden	
3A	2	2	3 verschieden → 1 gemeinsame Schnittgerade	
3B	2	2	2 identisch, 3. schneidet → 1 Schnittgerade	
4A	1	2	3 parallel → kein Schnitt-Objekt	
4B	1	2	2 identisch, 3. parallel → 1 Schnittebene	
5	1	1	3 identisch → gemeinsame Schnittebene	

4. Beispiele

- Die Ebenen entsprechen den Zeilen des Linearen Gleichungssystems, sind damit also als Koordinatengleichung definiert. Die verschiedenen Ebenen werden den Zeilen zugeordnet, Zeile 1 steht also für E_1, usw.
- Bekannt ist, dass eine parallele Ebene vorliegt, wenn die Koeffizienten (linke Seite in der Koordinatengleichung) einer Ebene Vielfache der Koeffizienten der anderen Ebene sind. Identisch sind Ebenen dann, wenn alle Koeffizienten (linke + rechte Seite) Vielfache sind. Bekannt ist, dass in R^3 eine Gerade nicht als Koordinatengleichung definiert werden kann. Es muss als Ergebnis der Rechnung eine Parameterform g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u}$ entstehen.
- Bei linear abhängigen Zeilen kann irgendein Vielfaches in den Zeilen, z.B. "4 8 12 16" anstelle von "1 2 3 4", stehen oder eine Linearkombination der anderen Zeilen. In den Beispielen wird jeweils eine einfache Möglichkeit angeschrieben.
- Bei der Erzeugung der Stufenform kann ein Umsortieren der Zeilen nötig sein. In den Beispielen wird die Ausgangsmatrix so angegeben, dass "ohne langes Überlegen" eine sinnvolle Stufenform entsteht.

1) 3 verschiedene Ebenen - 1 Schnittpunkt

$$\mathbf{A}|\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 61 \\ 1 & 3 & 2 & 54 \\ 1 & -3 & 4 & 36 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 61 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -5 & 1 & -25 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 61 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -60 \end{pmatrix}$$

rang ($\mathbf{A}$) = 3, rang($\mathbf{A}|\mathbf{c}$) = 3

z = 15; y = -7 + 15 = 8; x = 61 - 16 -45 = 0; Schnittpunkt S(0|8|15)
L = {Schnittpunkt S}

<u>Nur</u> als Kontrolle und zur "Illustration", <u>nicht</u> als vorgeschlagener Rechenweg:
Jeweils 2 Ebenen haben eine Schnittgerade, dann Schnittpunkt dieser Geraden.

<u>Schnittgeraden</u>

$\mathbf{g_{12}}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 61 \\ 1 & 3 & 2 & 54 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 61 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \to$ 1 freier Parameter, sei z = t.

y = -7 + t; x = 61 +14 -2 t - 3 t = -5 t +75; g_{12}: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 75 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{g_{13}}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 61 \\ 1 & -3 & 4 & 36 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 61 \\ 0 & -5 & 1 & -25 \end{pmatrix} \to$ 1 freier Parameter, sei y = t.

z = -25 + 5 t; x = 61 -2 t + 75 - 15 t = -17 t +136; g_{13}: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 136 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\mathbf{g_{23}}$: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 54 \\ 1 & -3 & 4 & 36 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 54 \\ 0 & -6 & 2 & -18 \end{pmatrix} \to$ 1 freier Parameter, sei y = t.

z = -9 + 3 t; x = 54 - 3 t + 18 - 6 t = -9 t +72; g_{23}: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 72 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt ***(g_{12}/g_{13})***: $\begin{pmatrix}75\\-7\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}136\\0\\-25\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-17\\1\\5\end{pmatrix}$

-5 s + 17 t = 61 / s - t = 7 / s - 5 t = -25

Zeile 1,2: s = 7 + t; - 35 - 5 t + 17 t = 61; t = 8; s = 15; 3. Zeile: 15 - 40 = -25 ✓

Schnittpunkt (g_{12}/g_{13}): $\mathbf{s} = \begin{pmatrix}75\\-7\\0\end{pmatrix} + 15\begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\15\end{pmatrix}$; $\mathbf{s} = \begin{pmatrix}136\\0\\-25\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}-17\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\15\end{pmatrix}$

Schnittpunkt ***(g_{12}/g_{23})***: $\begin{pmatrix}75\\-7\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}72\\0\\-9\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-9\\1\\3\end{pmatrix}$

-5 s + 9 t = -3 / s - t = 7 / s - 3 t = -9

Zeile 1,2: s = 7 + t; - 35 - 5 t + 9 t = -3; t = 8; s = 15; 3. Zeile: 15 - 24 = -9 ✓

Schnittpunkt (g_{12}/g_{23}): $\mathbf{s} = \begin{pmatrix}75\\-7\\0\end{pmatrix} + 15\begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\15\end{pmatrix}$; $\mathbf{s} = \begin{pmatrix}72\\0\\-9\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}-9\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\15\end{pmatrix}$

Schnittpunkt ***(g_{13}/g_{23})***: $\begin{pmatrix}136\\0\\-25\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-17\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}72\\0\\-9\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-9\\1\\3\end{pmatrix}$

-17 s + 9 t = -64 / s - t = 0 / 5 s - 3 t = 16

Zeile 1,2: s = t; -17 t + 9 t = -64; t = 8; s = 8; 3. Zeile: 40 - 24 = 16 ✓

Schnittpunkt (g_{13}/g_{23}): $\mathbf{s} = \begin{pmatrix}136\\0\\-25\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}-17\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\15\end{pmatrix}$; $\mathbf{s} = \begin{pmatrix}72\\0\\-9\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}-9\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\15\end{pmatrix}$

2A) 2 parallele Ebenen, 3. schneidet - 2 Schnittgeraden

$\mathbf{A|c} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&6\\1&2&3&5\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

rang (**A**) = 2, rang(**A|c**) = 3

Widerspruch, Lösungsmenge L = {}
Lösung mit 1 freiem Parameter für E_1 und E_2
z = 2; x + 2 y + 6 = 4; Parameter y = t; x = -2 t - 2

geordnet: Schnittgerade g_1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

Das ist die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2.
Weil E_3 parallel zu E_1 ist, gibt es auch noch eine Schnittgerade E_2 und E_3.

$\begin{pmatrix}1&2&4&6\\1&2&3&5\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&2&4&6\\0&0&1&1\end{pmatrix} \rightarrow$ z = 1; x + 2 y + 4 = 6; y = t; x = 2 -2 t

geordnet: g_2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ Dies ist eine zu g_1 parallele Schnittgerade.

Kontrolle: E_1 und E_3 schneiden sich nicht:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Widerspruch erhalten, kein Schnitt-Objekt.

2B) 3 verschiedene Ebenen, - 3 Schnittgeraden

$$\mathbf{A|c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \\ 4 & -7 & 9 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 15 & 3 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}$$

Zeile 3 enthält einen Widerspruch, keine Lösung, L = { }

$\rightarrow$ rang(**A**) = 2, rang(**A|c**) = 3

rang(**A**) =2, rang(**A|c**) = 3: 3 verschiedene Ebenen liegen vor, bei den Normalen muss aber eine lineare Abhängigkeit bestehen. Hier ist z.B. $E_3 = 4\ E_1 - E_2$.

Schnittgeraden zwischen jeweils 2 Ebenen:

***g*$_{12}$**: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 freier Parameter, sei z = t.

$\rightarrow$ 5 y + t = 10; y = 2 - 1/5 t; x + 4 - 2/5 t + 3 t = 4; x = -13/5 t

geordnet: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow g_{12}\text{: } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

***g*$_{13}$**: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -7 & 9 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 15 & 3 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 freier Parameter, sei z = t.

$\rightarrow$ 15 y + 3 t = 11; y = 11/15 - 1/5 t; x + 22/15 - 2/5 t + 3 t = 4; x = -13/5 t + 38/15

geordnet: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 38/15 \\ 11/15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow g_{13}\text{: } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 38/15 \\ 11/15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

(Eine "schönere" Angabe für den Aufpunkt wäre möglich, ist aber nicht nötig für diese Aufgabe.)

***g*$_{23}$**: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & -2 \\ 4 & -7 & 9 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 freier Parameter, sei z = t.

$\rightarrow$ 5 y + t = -9; y = -9/5 - 1/5 t; 2 x + 9/5 + 1/5 t + 5 t = -2; x = -13/5 t -19/10

geordnet: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -19/10 \\ -9/5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow g_{23}\text{: } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -19/10 \\ -9/5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Geometrisch: Drei parallele Schnittgeraden (zwischen jeweils 2 Ebenen)

➔ Allgemeine Aussage dazu: Unten, "6. Anhang"

3A) 3 verschiedene Ebenen - 1 Schnittgerade

$$\mathbf{A|c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 freier Parameter, sei y = t

3z = 4; z = 4/3; x + 2 t + 4 = 4; x = -2 t

$\rightarrow$ rang(**A**) = 2, rang(**A|c**) = 2

rang(**A**) = rang(**A|c**) = 2 und keine parallelen Ebenen: nur 2 linear unabhängige Ebenen liegen vor, eine Ebene muss also von den zwei anderen linear abhängig sein. Hier ist z.B. $E_3 = 4\ E_1 - E_2$.

geordnet: Schnittgerade g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4/3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; L = {Schnittgerade g}

<u>Nur</u> als Kontrolle und zur "Illustration", <u>nicht</u> als vorgeschlagener Rechenweg:
Wie bei 1. wäre es möglich, auch jeweils die einzelnen Schnittgeraden zweier Ebenen zu berechnen. Man erhält dann dreimal dieselbe Gerade wie im Gesamt-Schritt.

<u>Beispiel</u> ***g_{13}***: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to$ gleiche Gerade wie vorher

3B) 2 identische Ebenen, 3. schneidet - 1 Schnittgerade

$\mathbf{A|c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rang ($\mathbf{A}$) = 2, rang($\mathbf{A|c}$) = 2

rang(**A**) = 2 ist bei 2 identischen Ebenen erklärbar: nur 2 linear unabhängige Ebenen liegen vor.

Lösung mit 1 freiem Parameter
z = 1; x + 2 y + 3 = 4; Parameter y = t; x = -2 t + 1
geordnet: Schnittgerade g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; L = {Schnittgerade g}
Geometrisch: 1 Schnittgerade einer Ebene mit den zwei identischen anderen Ebenen

4A) 3 parallele Ebenen - kein Schnitt-Objekt

$\mathbf{A|c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rang ($\mathbf{A}$) = 1, rang($\mathbf{A|c}$) = 2

Widerspruch $\Rightarrow$ keine Lösung, L = {}, kein Schnitt-Objekt

4B) 2 identische Ebenen, 3. parallel - 1 Schnittebene

$\mathbf{A|c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rang ($\mathbf{A}$) = 1, rang($\mathbf{A|c}$) = 2

Einmal Widerspruch, Einmal Lösung mit 2 Parametern
Lösungsmenge L = {}
Geometrisch Schnittebene E: x + 2y + 3z = 4 für E_1 und E_3
E_2 parallel zu E_1 (und E_3)

5) 3 identische Ebenen - gemeinsame Schnittebene

$$\mathbf{A}|\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang (**A**) = 1, rang(**A**|**c**) = 1

Wegen linearer Abhängigkeit folgt eine Lösung mit 2 Parametern
$\Rightarrow L = \{(x,y,z) \mid x + 2y + 3z = 4\}$

Geometrisch: 1 Ebene, E: $x + 2y + 3z = 4$. ($E \equiv E_1 \equiv E_2 \equiv E_3$)

5. Alternative Einteilung der Lösungsmöglichkeiten

Anstelle der Anordnung nach dem Rang ist auch eine Anordnung nach den geometrischen Objekten möglich. (Die vorige Einteilung wird zum Vergleich genannt.}

1. 3 parallele oder identische Ebenen
   - 1.1 3 identische Eb. **[5]**
   - 1.2 2 identische Eb., 1 parallele Eb. **[4B]**
   - 1.3 3 parallele Eb. **[4A]**
2. 2 parallele oder identische Ebenen
   - 2.1 2 identische Eb., 3. Eb. schneidet **[3B]**
   - 2.2 2 parallele Eb., 3. Eb. schneidet [**2A]**
3. keine parallelen oder identischen Ebenen
   - 3.1 keine gemeinsame Gerade, kein gemeinsamer Punkt **[2B]**
   - 3.2 1 gemeinsame Schnittgerade **[3A]**
   - 3.3 1 gemeinsamer Schnittpunkt **[1]**

6. Anhang: Zum Fall 2B, 3 verschiedene Ebenen.

♦ Wenn 3 Schnittgeraden vorkommen, <u>müssen</u> diese parallel sein. Eine Schnittgerade liegt in zwei Ebenen, aus der Koordinatengleichung ist die Normale auf die Ebene bekannt.
Sei die Schnittgerade g_{12}: $\mathbf{x} = \mathbf{f_{12}} + t_{12}\,\mathbf{u_{12}}$. Dann ist $\mathbf{u_{12}} \perp \mathbf{n_1}$ und $\mathbf{u_{12}} \perp \mathbf{n_2}$.
Für eine direkte, parameterfreie Lösung $\mathbf{u_{12}} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$.
(Trivial ist, dass das Vektorprodukt einen eventuell kollinearen Vektor zum Ergebnis der obigen Rechnung liefern kann.)
Die Normale der Ebene E_3 ist linear abhängig von E_1 und E_2. (Nicht von einer Ebene allein, weil dann eine parallele Ebene vorliegen würde.)
Sei die Schnittgerade g_{13}: $\mathbf{x} = \mathbf{f_{13}} + t_{13}\,\mathbf{u_{13}}$. Dann ist $\mathbf{u_{13}} \perp \mathbf{n_1}$ und $\mathbf{u_{13}} \perp \mathbf{n_3}$, $\mathbf{u_{13}} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_3}$.
mit $\mathbf{n_3} = r\,\mathbf{n_1} + s\,\mathbf{n_2}$ folgt $\mathbf{u_{13}} = \mathbf{n_1} \times (r\,\mathbf{n_1} + s\,\mathbf{n_2}) = r\,\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_1} + s\,\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = s\,\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$
($\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_1} = \mathbf{0}$) $\mathbf{u_{13}}$ ist kollinear zu $\mathbf{u_{12}}$, g_{13} also parallel zu g_{12}.
♦ Als "Kontrolle der Idee" (evtl. auch als Kontrolle der Rechnung) kann der Aufpunkt der Schnittgeraden $\mathbf{f_{ij}}$ durch Einsetzen von $\mathbf{g_{ij}}$ überprüft werden.
Für jede Ebene gilt E_i: $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n_i} = \mathbf{a_i}\cdot\mathbf{n_i}$. Wenn eine Schnittgerade dieser Ebene E_i eingesetzt wird, folgt $(\mathbf{f_{ij}} + t_{ij}\,\mathbf{u_{ij}})\cdot\mathbf{n_i} = \mathbf{a_i}\cdot\mathbf{n_i} = \mathbf{f_{ij}}\cdot\mathbf{n_i} + t_{ij}\,\mathbf{u_{ij}}\cdot\mathbf{n_i} = \mathbf{f_{ij}}\cdot\mathbf{n_i}$ (wegen $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}$).

♦ *Zahlenbeispiel* (*Ebenen von 2B*)

$\mathbf{n_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{n_2} = \begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$

$\mathbf{u_{12}} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\1 & 2 & 3\\2 & -1 & 5\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}2 & 3\\-1 & 5\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{vmatrix} = 13\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\,\mathbf{k} = \begin{pmatrix}13\\1\\-5\end{pmatrix}$ ✓

Aufpunkt von g_{ij} $F_{12}(0|2|0)$, $F_{23}(-19/10 \mid -9/5 \mid 0)$, $\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{n_1} = 4$, $\mathbf{a_2}\cdot\mathbf{n_2} = -2$

$\mathbf{f_{12}}\cdot\mathbf{n_1} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 4$ ✓; $\mathbf{f_{23}}\cdot\mathbf{n_2} = \begin{pmatrix}-19/10\\-9/5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} = -19/5 + 9/5 = -2$ ✓

7. Beispiele zu überbestimmten Linearen Gleichungssystemen

Hinzufügen einer weiteren Ebene, identisch zu einer vorhandenen, ändert weder den Rang noch die prinzipielle geometrische Situation. Hinzufügen einer parallelen oder nicht parallelen Ebene ändert meistens die Art der Lösung, kann aber nie aus einer "Nicht-Lösung" (2A, 2B, 4A, 4B) eine "Lösung" (1, 3A, 3B, 5) erzeugen.

Fall 1 - rang(**A**) = 3, rang(**A**|**c**) = 3 - 1 Schnittpunkt

- Neu = parallel → rang(**A**) = 3, rang(**A**|**c**) = 4 ⇒ 5 Schnittgeraden, darunter 2 Parallelenpaare.
- Neu = nicht parallel → rang(**A**) = 3, rang(**A**|**c**) = 4 ⇒ 5 verschiedene Schnittgeraden. Jeweils 3 Ebenen haben einen gemeinsamen Schnittpunkt (insgesamt 4 verschiedene).

Durch die Erweiterung ist die vorher eindeutige Lösung "vernichtet".

Fall 2A - rang(**A**) = 2, rang(**A**|**c**) = 3 - 2 Schnittgeraden

- Neu = parallel → Ränge erhalten ⇒ 3. neue Schnittgerade parallel zu den vorhandenen
- Neu = nicht parallel → rang(**A**) = 3, rang(**A**|**c**) = 4 ⇒ 5 Schnittgeraden, unter den 3 neuen Schnittgeraden 2 parallele.

Die Situation "Nicht-Lösung" bleibt bestehen.

Fall 3B - rang(**A**) = 2, rang(**A**|**c**) = 2 - 1 Schnittgerade

- Neu = parallel zu den 2 identischen Ebenen oder parallel zur schneidenden Ebene → rang(**A**) = 2, rang(**A**|**c**) = 3 ⇒ neue Schnittgerade parallel zur vorhandenen (entspricht 2A)
- Neu = nicht parallel → rang(**A**) = 3, rang(**A**|**c**) = 3 ⇒ 1 Schnittpunkt (entpricht 1)

Aus einer Lösung entsteht eine andere oder die Lösung wird "vernichtet".